Esercizio 2

Progettare un filtro passa basso alla Butterworth, di tipo vcvs a componenti uguali che abbia f_H=3kHz con guadagno di 20dB in banda passante e sia in grado di fornire a 6kHz un'attenuazione relativa α almeno pari a 26dB.

Svolgimento:

Dobbiamo innanzi tutto determinare l'ordine del filtro. Usiamo la relazione[1]:

$$n = \frac{\log\left(10^{\frac{|\alpha|}{10}} - 1\right)}{2\log\frac{\omega_\alpha}{\omega_H}}$$

Dove:

$$\alpha = 26dB;\ \omega_\alpha = 2\pi \cdot 6000 = \frac{37680rad}{s};\ \ \omega_H = 2\pi \cdot 3000 = \frac{18840rad}{s}$$

Sostituendo:

$$n = \frac{log\left(10^{\frac{26}{10}} - 1\right)}{2log\frac{37680}{18840}} \cong 4.32$$

Dobbiamo, quindi, realizzare un filtro del quinto ordine. Usiamo gli schemi dei filtri vcvs come richiesto e mettiamo in cascata un filtro del primo ordine e due del secondo ordine come in figura 1.

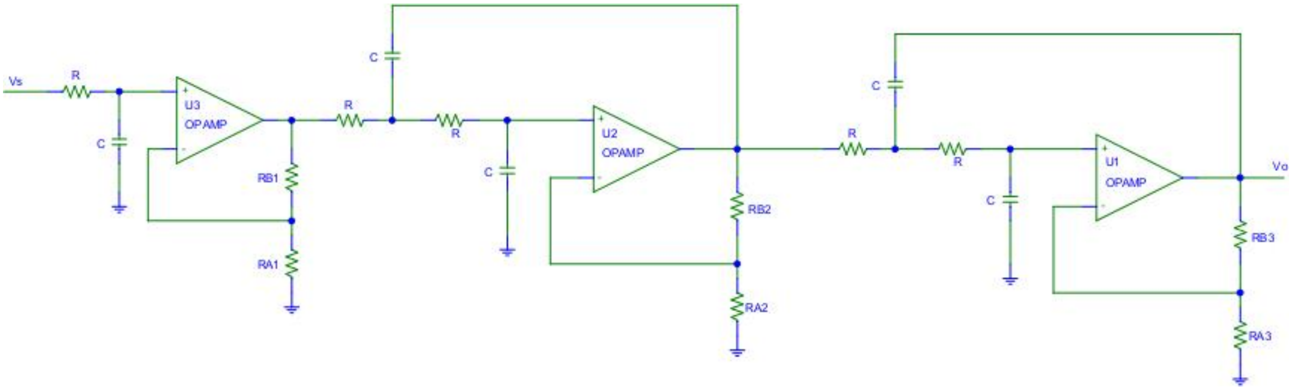

Figura 1 Filtro vcvs passa basso del quinto ordine.

Per la risposta in frequenza dobbiamo scegliere l'approssimazione di Butterworth come richiesto quindi tutte le "celle" dovranno avere la stessa frequenza di taglio $f_H = f_0$.

Dalle relazioni di progetto di un filtro passa basso già ricavate (vedi http://cmathilde.altervista.org/Elettronica/Filtri/FormulePBasso.pdf) si trova:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC}$$

Da cui deriva:

$$2\pi \cdot 3000 = \frac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{RC} = 18840Hz \quad \rightarrow \quad RC \cong 5 \cdot 10^{-5}sec$$

[1] Per ricavare la formula vedi http://cmathilde.altervista.org/Elettronica/Filtri/OrdinePBasso.pdf

Poniamo C=22nF e troviamo R:

$$R = \frac{5 \cdot 10^{-5} sec}{2.2 \cdot 10^{-8}} \Omega = 2412\Omega = 2.4k\Omega$$

Scegliamo una resistenza della serie E24 (tolleranza minore o uguale a ±2%).
Per dimensionare le resistenze R_{Ai} e R_{Bi} delle due celle del secondo ordine usiamo la relazione:

$$\frac{R_{Bi}}{R_{Ai}} = 2 - 2\xi \qquad (1)$$

Dove *i=1,2* e ξ è il fattore di smorzamento.
Un filtro passa basso del quinto ordine presenta 5 poli di cui uno reale egli altri quattro a due a due complessi coniugati. Dalla tabella dei polinomi di Butterworth troviamo il denominatore della funzione di trasferimento per un filtro del quinto ordine:

$$(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)(s + 1)$$

Ciascuna cella del secondo ordine ha funzione di trasferimento data da:

$$A(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Dato che le celle sono in cascata la funzione di trasferimento complessiva è data da:

$$A(s) = \frac{K_1\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_1\omega_0 s + \omega_0^2} \frac{K_2\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_2\omega_0 s + \omega_0^2} \frac{K_3\omega_0}{s + \omega_0}$$

Consideriamo la prima cella del secondo ordine (quella più a destra della figura 1): dal confronto con il denominatore della funzione di trasferimento con ω_0=1[2] si ricava:

$$2\xi = 0.618 \quad \rightarrow \qquad \xi = 0.309$$

Sostituendo nella (1) si trova:

$$\frac{R_{B1}}{R_{A1}} = 2 - 2\xi = 2 - 0.618 = 1.382 \qquad \rightarrow \qquad R_{B1} = 1.382 R_{A1}$$

Scegliamo R_{A1}=13kΩ. Quindi:

$$R_{B1} = 1.382 \cdot 13000 = 17966\Omega \quad \rightarrow \quad R_{B1} = 18k\Omega$$

Con questi valori il guadagno di tensione vale:

$$K_1 = 1 + \frac{R_{B1}}{R_{A1}} = 1 + \frac{18}{13} \cong 2.385 \qquad (2)$$

Consideriamo ora la seconda cella del secondo ordine. Con lo stesso procedimento otteniamo:

$$2\xi = 1.618 \quad \rightarrow \qquad \xi = 0.809$$

Sostituendo nella (1):

$$\frac{R_{B2}}{R_{A2}} = 2 - 2\xi = 2 - 1.618 = 0.382 \qquad \rightarrow \qquad R_{B2} = 0.382 R_{A2}$$

Scegliamo R_{A2}=18kΩ. Quindi:

$$R_{B2} = 0.382 \cdot 18000 = 6876\Omega \quad \rightarrow \quad R_{B2} = 6.8k\Omega$$

[2] Ricordiamo che I polinomi di Butterworth sono normalizzati.

Con questi valori il guadagno di tensione vale:

$$K_2 = 1 + \frac{R_{B2}}{R_{A2}} = 1 + \frac{6.8}{18} \cong 1.378 \quad (3)$$

Adesso consideriamo la cella del primo ordine e troviamo il valori delle resistenze RA3 ed RB3 in modo tale che il filtro guadagni, complessivamente, 20dB in banda passante.
Il guadagno totale è dato da:

$$K_{TOT} = K_1 K_2 K_3$$

Deve essere K_{TOT}=20dB quindi:

$$K_{TOT} = 20\text{dB} \quad \rightarrow \quad K_1 K_2 K_3 = 20B \quad \rightarrow \quad 20 \log K_1 K_2 K_3 = 20$$

$$\log K_1 K_2 K_3 = \frac{20}{20} = 1 \quad \rightarrow \quad K_1 K_2 K_3 = 10^1 = 10$$

Sostituendo i valori trovati nella (2) e nella (3):

$$K_3 = \frac{10}{K_1 K_2} = \frac{10}{2.385 \cdot 1.378} = 3.042$$

Possiamo scrivere:

$$1 + \frac{R_{B3}}{R_{A3}} = 3.042 \quad \rightarrow \quad \frac{R_{B3}}{R_{A3}} = 2.042$$

Scegliamo R_{A3}=18kΩ e calcoliamo:

$$R_{B3} = 2.042 R_{A3} \cong 36769\Omega$$

Poniamo R_{A1}=36kΩ.
Ricapitolando:

$$C = 22nF; R = 2.4k\Omega;\ R_{A1} = 13k\Omega;\ R_{B1} = 18k\Omega;\ R_{A2} = 18k\Omega;\ R_{B2} = 6.8k\Omega;$$

$$R_{A3} = 18k\Omega;\ R_{B3} = 36k\Omega$$

Matilde Consales