La funzione di trasferimento

Ricavare l'espressione generale della funzione di trasferimento di un filtro a reazione positiva semplice del secondo ordine.

Svolgimento

I filtri attivi di questo tipo presentano una rete di reazione positiva costituita dalle 5 ammettenze[1] di figura 1.

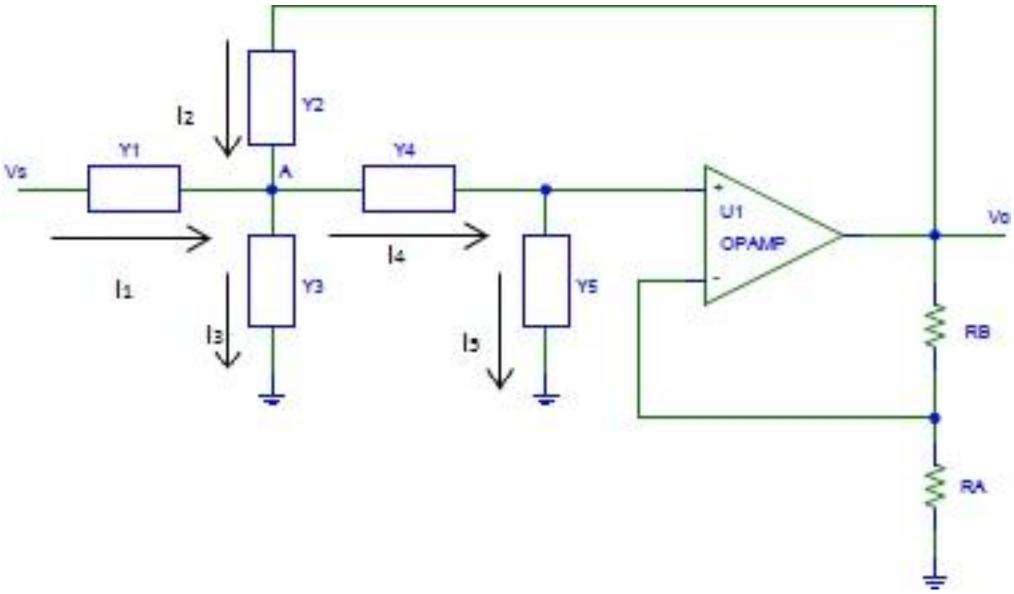

Figura 1 Filtro generico a reazione positiva semplice del secondo ordine.

Questo filtro è detto anche di Sallen-Key o voltage controlled voltage source (vcsc). Scegliendo opportunamente le ammettenze si possono realizzare filtri del secondo ordine passa alto o passa basso, ecc. Il guadagno statico, invece, dipende dalle due resistenze.

Per trovare la funzione di trasferimento applichiamo il primo principio di Kirchhoff al nodo A:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \qquad (1)$$

Adesso troviamo le correnti:

$$I_1 = (V_s - V_A)Y_1$$

$$I_2 = (V_o - V_A)Y_2$$

$$I_3 = V_A Y_3$$

Per determinare I_4 osserviamo che le ammettenze Y_4 e Y_5 sono in serie perché l'amplificatore operazionale si suppone ideale e. pertanto, non assorbe corrente.

$$I_4 = V_A \frac{Y_4 Y_5}{Y_4 + Y_5}$$

Sostituendo nella (1) possiamo scrivere:

$$(V_s - V_A)Y_1 + (V_o - V_A)Y_2 - V_A Y_3 - V_A \frac{Y_4 Y_5}{Y_4 + Y_5} = 0$$

[1] Usiamo le ammettenze per semplificare I calcoli della funzione di trasferimento.

Raccogliamo V_A:

$$V_sY_1 - \left(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \frac{Y_4Y_5}{Y_4 + Y_5}\right)V_A + V_oY_2 = 0 \qquad (2)$$

Dobbiamo calcolare V_A. Per cominciare osserviamo che la tensione al piedino invertente dell'amplificatore operazionale è quella ai capi dell'ammettenza Y_5 che è attraversata dalla corrente I_4. Ma allora:

$$V_+ = \frac{I_4}{Y_5} = V_A\frac{Y_4}{Y_4 + Y_5} \qquad (3)$$

Osserviamo che $V_+=V_-$ infatti, dato che l'amplificatore operazionale è ideale e funziona in zona attiva, i due piedini di ingresso sono in cortocircuito virtuale. Ma V- è la tensione ai capi della resistenza R_A che è in serie alla resistenza R_B perché, come detto precedentemente, l'amplificatore operazionale, essendo ideale, presenta un'impedenza di ingresso infinita e, pertanto, non assorbe corrente. Scriviamo la relazione (data dal partitore di tensione):

$$V_+ = V_- = V_o\frac{R_A}{R_A + R_B}$$

Indichiamo con:

$$K = \frac{V_o}{V_+} = \frac{V_+\frac{R_A+R_B}{R_A}}{V_+} = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

La quantità K rappresenta il guadagno statico del filtro.
Quindi:

$$V_+ = \frac{V_o}{K}$$

Sostituendo nella (3) otteniamo:

$$\frac{V_o}{K} = V_A\frac{Y_4}{Y_4 + Y_5}$$

Da cui ricaviamo:

$$V_A = \frac{V_o}{K}\frac{Y_4 + Y_5}{Y_4}$$

Sostituiamo nella (2):

$$V_sY_1 - \left(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \frac{Y_4Y_5}{Y_4 + Y_5}\right)\frac{V_o}{K}\frac{Y_4 + Y_5}{Y_4} + V_oY_2 = 0$$

$$V_sY_1 - \frac{V_o}{K}\left(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \frac{Y_4Y_5}{Y_4 + Y_5}\right)\frac{Y_4 + Y_5}{Y_4} + \frac{V_o}{K}Y_2K = 0$$

$$V_sY_1 - \frac{V_o}{K}\left(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \frac{Y_4Y_5}{Y_4 + Y_5}\right)\frac{Y_4 + Y_5}{Y_4} + \frac{V_o}{K}Y_2K = 0$$

$$V_sY_1 - \left[\frac{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_4Y_5 - KY_4Y_2}{Y_4}\right]\frac{V_o}{K} = 0$$

$$V_sY_1 - \left[\frac{(Y_1 + Y_2 + Y_3)Y_4 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)Y_5 + Y_4Y_5 - KY_4Y_2}{Y_4}\right]\frac{V_o}{K} = 0$$

$$V_sY_1 - \left[\frac{(Y_1 + Y_2 - KY_2 + Y_3)Y_4 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5}{Y_4}\right]\frac{V_o}{K} = 0$$

$$V_sY_1 = \frac{V_o}{KY_4}[(Y_1 + (1 - K)Y_2 + Y_3)Y_4 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5]$$

$$V_o = \frac{KY_1Y_4}{(Y_1 + (1 - K)Y_2 + Y_3)Y_4 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5}V_s$$

Finalmente possiamo scrivere la funzione di trasferimento cercata:

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{KY_1Y_4}{(Y_1 + (1 - K)Y_2 + Y_3)Y_4 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5}$$

Questa relazione vale per tutti i filtri attivi del secondo ordine a reazione positiva semplice.

Matilde Consales