Le relazioni per il progetto di un filtro passa basso del secondo ordine a retroazione positiva semplice

Ricavare l'espressione le relazioni di progetto di un filtro passa basso del secondo ordine a retroazione positiva semplice o vcvs.

Svolgimento:

In figura 1 si vede lo schema di un filtro passa basso a retroazione semplice del secondo ordine. Per semplificare abbiamo scelto le resistenze e i condensatori dello stesso valore.

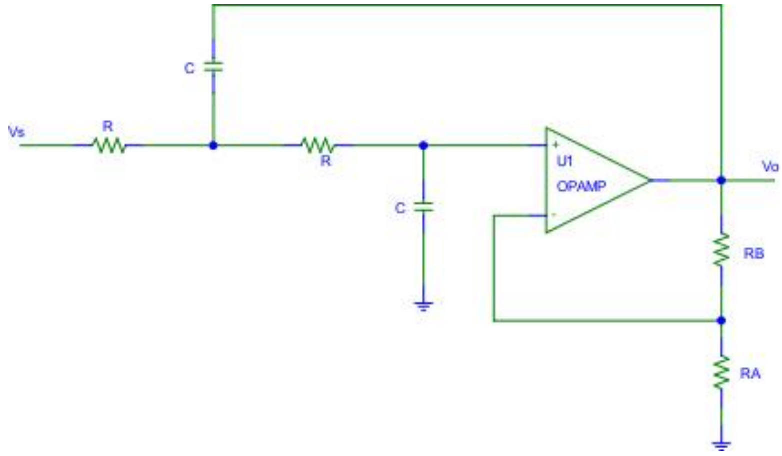

Figura 1 Filtro vcvs passa basso del secondo ordine.

Per trovare la funzione di trasferimento confrontiamo lo schema di figura 1 con quello generico di figura 2.

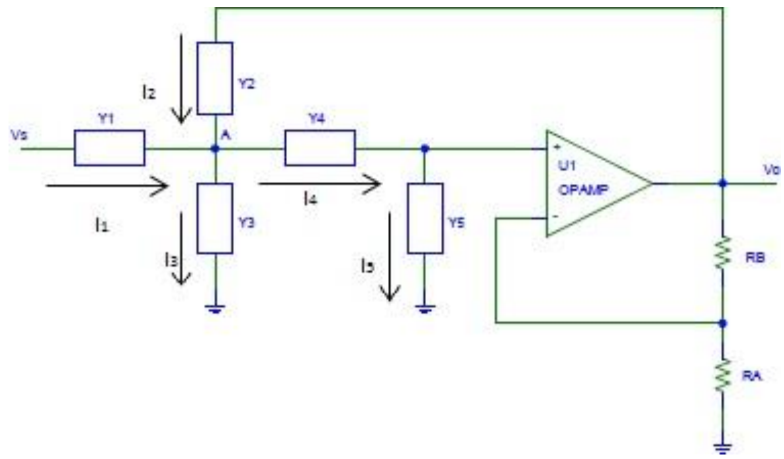

Figura 2 Filtro generico a reazione positiva semplice del secondo ordine.

Abbiamo già determinato la funzione di trasferimento di un filtro vcvs[1] ma la riportiamo per comodità:

$$A(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{KY_1Y_4}{(Y_1 + (1-K)Y_2 + Y_3)Y_4 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5}$$

Dal confronto si vede che:

$$Y_1 = Y_4 = \frac{1}{R} \qquad Y_2 = Y_5 = sC \qquad Y_3 = 0$$

[1] Vedi http://cmathilde.altervista.org/Elettronica/Filtri/FdT.pdf

Sostituendo si trova:

$$A(s) = \frac{K\frac{1}{R^2}}{\left[\frac{1}{R} + (1-K)sC\right]\frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R}\right)sC}$$

$$A(s) = \frac{K\frac{1}{R^2}}{\frac{1}{R^2} + \frac{sC}{R} - \frac{KsC}{R} + \frac{2sC}{R} + s^2C^2}$$

$$A(s) = \frac{K\frac{1}{R^2}}{\frac{1+sRC-KsRC+2sRC+s^2R^2C^2}{R^2}}$$

$$A(s) = \frac{K}{s^2C^2R^2 + (3-K)sCR + 1}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per il coefficiente di s^2:

$$A(s) = \frac{\frac{K}{R^2C^2}}{s^2 + \frac{3-K}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}} \quad (1)$$

La funzione di trasferimento di un filtro passa basso presenta due poli complessi coniugati:

$$A(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2)$$

Dove ξ è il fattore di smorzamento e ω_0 è la pulsazione di taglio. Confrontando le equazioni (1) e (2) si ricavano le relazioni di progetto. La frequenza di taglio è data da:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Ricaviamo il guadagno in banda passante:

$$\frac{3-K}{RC} = 2\xi\omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{3-K}{RC} = 2\xi\frac{1}{RC}$$

Semplificando:

$$3 - K = 2\xi \quad \rightarrow \quad K = 3 - 2\xi$$

Ricordando che:

$$K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

E sostituendo:

$$1 + \frac{R_B}{R_A} = 3 - 2\xi \quad \rightarrow \quad \frac{R_B}{R_A} = 2 - 2\xi$$

Ricordando che il coefficiente di risonanza vale:

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

Possiamo scrivere:

$$1+\frac{R_B}{R_A}=3-\frac{1}{Q} \quad \rightarrow \quad \frac{R_B}{R_A}=2-\frac{1}{Q}$$

Matilde Consales