La determinazione dell'ordine di un filtro passa alto alla Butterworht in base alle specifiche

Determinare l'ordine *n* di un filtro passa alto alla Butterworth, con pulsazione di taglio ω_L, in grado di fornire, per una pulsazione data ω_α, un'attenuazione relativa pari ad α.

Svolgimento

Per un filtro passa alto con l'approssimazione di Butterworth il modulo della funzione di trasferimento è dato da:

$$|A(j\omega)| = \frac{|A_0|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^{2n}}}$$

Dove $|A_0|$ è il guadagno in banda passante.
Dobbiamo determinare l'ordine del filtro che presenti un'attenuazione α alla pulsazione ω_α quindi deve essere:

$$\frac{|A(j\omega_\alpha)|}{|A_0|} = \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n}}}$$

Con $\alpha < 0$. Possiamo scrivere:

$$20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n}}} = \alpha$$

$$-20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n}} = \alpha$$

$$-10\log\left[1+\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n}\right] = \alpha$$

$$\log\left[1+\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n}\right] = \frac{|\alpha|}{10}$$

$$1+\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n} = 10^{\frac{|\alpha|}{10}}$$

$$\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n} = 10^{\frac{|\alpha|}{10}} - 1$$

Applichiamo il logaritmo in base 10 ad ambo i membri:

$$\log\left(\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}\right)^{2n} = \log\left(10^{\frac{|\alpha|}{10}} - 1\right)$$

$$2n\log\frac{\omega_L}{\omega_\alpha} = \log\left(10^{\frac{|\alpha|}{10}} - 1\right)$$

Possiamo determinare il grado del filtro:

$$n = \frac{\log\left(10^{\frac{|\alpha|}{10}} - 1\right)}{2\log\frac{\omega_L}{\omega_\alpha}}$$

Il grado *n* va arrotondato al numero intero immediatamente superiore.

Matilde Consales