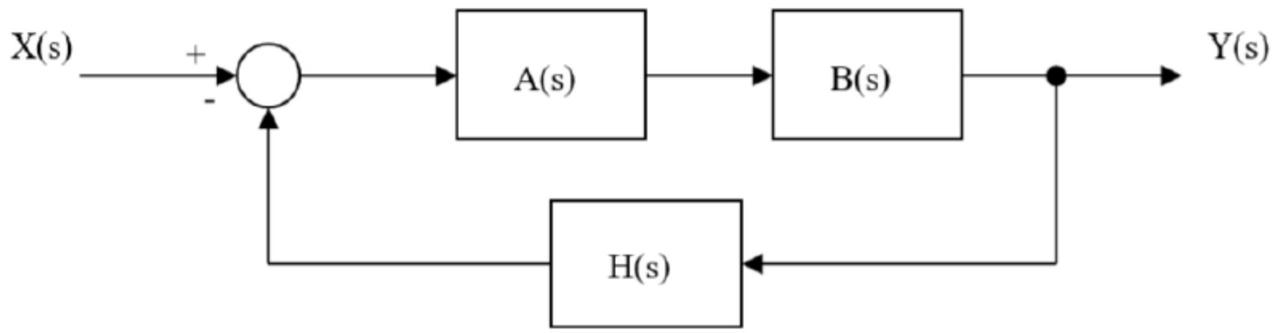
Quesito 4

Sia dato l'impianto lineare il cui schema a blocchi è riportato in figura:



Le funzioni di trasferimento dei blocchi valgono:

$$A(s) = \frac{K}{s^2 + 2s} \quad con\ K\ parametro\ reale$$

$$B(s) = \frac{s+1}{s+3}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

Il candidato, dopo aver calcolato la funzione di trasferimento complessiva del sistema, ne studi la stabilità al variare del parametro *K*.

Il candidato determini inoltre per quale valore del parametro *K* l'errore di velocità del sistema si mantiene inferiore allo 0,5% giustificando la risposta.

Svolgimento

Il sistema in esame presenta una retroazione negativa, pertanto la funzione di trasferimento è data da:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A(s)B(s)}{1 + A(s)B(s)H(s)}$$

Sostituendo le funzioni di trasferimento dei vari blocchi si ottiene:

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2)}\frac{s+1}{s+3}}{1 + \frac{K}{s(s+2)}\frac{s+1}{s+3}\frac{1}{s}} = \frac{\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}}{\frac{(s^2+2s)(s^2+3s) + Ks + K}{s^2(s+2)(s+3)}} =$$

$$= \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \frac{s^2(s+2)(s+3)}{s^4 + 3s^3 + 2s^3 + 6s^2 + Ks + K} = \frac{Ks(s+1)}{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + Ks + K}$$

Ricordiamo che un sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale fratta come quello in esame è asintoticamente stabile se e solo se tutti i poli hanno parte reale negativa. È semplicemente stabile se e solo se non presentano alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici. Non è agevole calcolare i poli della funzione di trasferimento del sistema proposto quindi dobbiamo studiarne il segno al variare del parametro K ricorrendo al criterio di Routh.

Scriviamo l'equazione caratteristica della funzione di trasferimento:

$$s^4 + 5s^3 + 6s^2 + Ks + K = 0$$

Costruiamo la tabella di Routh.
Nella prima riga (numero 4) si trascrivono i coefficienti delle potenze pari a partire dal grado più alto. Nella seconda riga (numero 3) si trascrivono i coefficienti delle potenze dispari sempre a partire dal grado più alto.
Per costruire la riga successiva procediamo come segue. Il primo elemento a sinistra si ricava dalla relazione:

$$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & K \end{vmatrix}}{5} = \frac{-(K-30)}{5} = \frac{30-K}{5}$$

Il secondo elemento è dato da:

$$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & K \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-(0-5K)}{5} = \frac{5K}{5} = K$$

Adesso ci spostiamo di una riga verso il basso e costruiamo la riga numero 1 con lo stesso procedimento. Il primo elemento si trova con il seguente calcolo:

$$\frac{-\begin{vmatrix} 5 & K \\ \frac{30-K}{5} & K \end{vmatrix}}{\frac{30-K}{5}} = \frac{-\left(5K - K\frac{30-K}{5}\right)}{\frac{30-K}{5}} = \frac{-\frac{25K-30K+K^2}{5}}{\frac{30-K}{5}} = \frac{5K-K^2}{5}\frac{5}{30-K} = \frac{5K-K^2}{30-K}$$

Il secondo elemento vale:

$$\frac{-\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ \frac{30-K}{5} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{30-K}{5}} = 0$$

Infine troviamo l'ultimo elemento:

$$\frac{-\begin{vmatrix} \frac{30-K}{5} & K \\ \frac{5K-K^2}{30-K} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{5K-K^2}{30-K}} = \frac{-\left(0 - K\frac{5K-K^2}{30-K}\right)}{\frac{5K-K^2}{30-K}} = \frac{K\frac{5K-K^2}{30-K}}{\frac{5K-K^2}{30-K}} = K$$

Riportiamo i valori trovati nella tabella:

Numero riga			
4	1	6	K
3	5	K	0
2	$\frac{30-K}{5}$	K	0
1	$\frac{5K-K^2}{30-K}$	0	
0	K		

Teorema: Ad ogni variazione di segno che presentano i dati della prima colonna della tabella corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.
Il sistema è asintoticamente stabile se tutti i poli hanno parte reale negativa: se la prima colonna della tabella di Routh non presenta variazioni. Ma allora tutti i dati della prima colonna devono essere positivi. Troviamo K risolvendo il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{30-K}{5} \\ \frac{5K-K^2}{30-K} \\ K>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 30-K>0 \\ \frac{5K-K^2}{30-K} \\ K>0 \end{cases}$$

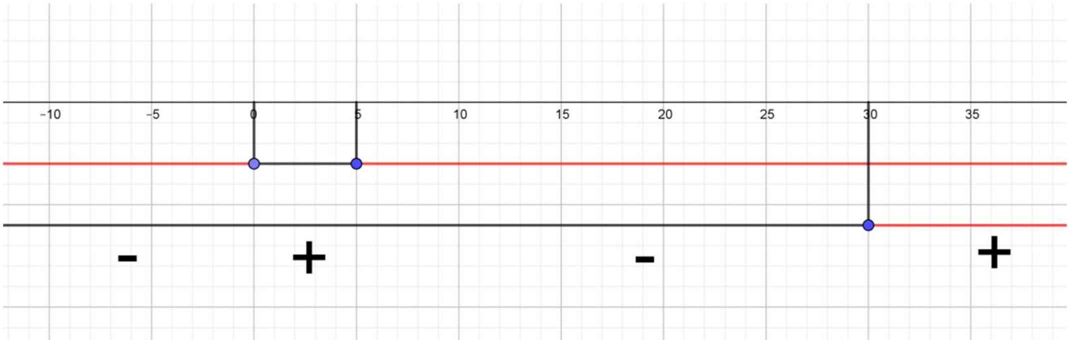
Consideriamo la seconda disequazione:

$$\frac{5K-K^2}{30-K}>0$$

$$5K-K^2>0 \rightarrow K(5-K)>0 \rightarrow 0<K<5$$

$$30-K>0 \rightarrow K<30$$

Facciamo il grafico:



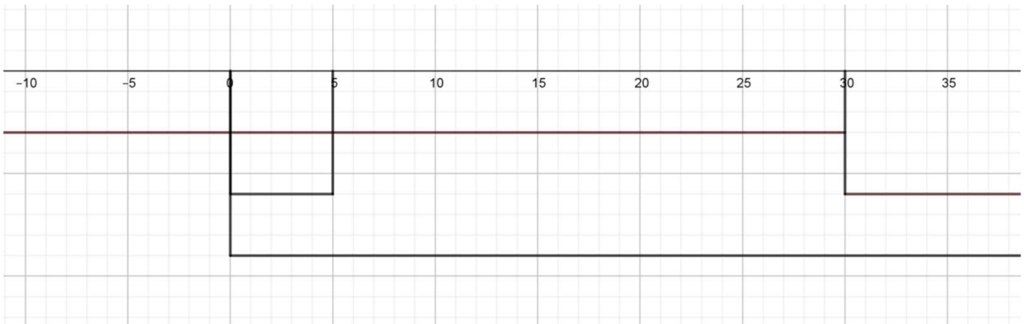
Quindi:

$$\frac{5K-K^2}{30-K}>0 \rightarrow 0<K<5 \quad K>30$$

Ritornando al sistema:

$$\begin{cases} K<30 \\ 0<K<5 \quad K>30 \\ K>0 \end{cases}$$

Facciamo il grafico per risolvere il sistema:



Dal grafico si evince che per $0<K<5$ tutti i poli hanno parte reale negativa e, quindi, il sistema proposto è asintoticamente stabile.

Si precisa che con il metodo utilizzato non abbiamo informazioni sulla robustezza del controllo. Vediamo adesso come si comporta il sistema nei punti estremi:

$$se\ K = 0 \quad G(s) = 0$$

$$se\ K = 5 \quad G(s) = \frac{5s(s+1)}{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 5s + 5}$$

In questo caso il sistema presenta 2 poli complessi coniugati con parte reale nulla $p_{1-2} = \pm j$. Per verificarlo consideriamo il denominatore della funzione di trasferimento e sostituiamo a *s* questi valori:

$$j^4 + 5j^3 + 6j^2 + 5j + 5 = 1 - 5j - 6 + 5j + 5 = 0$$

$$(-j)^4 + 5(-j)^3 + 6(-j)^2 + 5(-j) + 5 = 1 + 5j - 6 - 5j + 5 = 0$$

Il polinomio, allora è divisibile per:

$$s + j, \qquad s - j \quad e \quad (s + j)(s - j) = s^2 + 1$$

Facciamo la divisione e troviamo anche gli altri poli:

s^4	$5s^3$	$6s^2$	$5s$	5	s^2+1
$-s^4$		$-s^2$			s^2+5s+5
=	$5s^3$	$5s^2$	$5s$	5	
	$-5s^3$		$-5s$		
	=	$5s^2$		5	
		$-5s^2$		-5	
		=		=	

Possiamo scrivere:

$$G(s) = \frac{5s(s+1)}{(s+j)(s-j)(s^2 + 5s + 5)}$$

Troviamo anche gli altri due poli:

$$s_{1-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Scriviamo la funzione di trasferimento in forma fattorizzata:

$$G(s) = \frac{5s(s+1)}{(s+j)(s-j)\left(s - \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(s - \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Per *K=5* il sistema presenta i seguenti 2 zeri e 4 poli e precisamente:

$$z_1 = 0 \quad z_2 = -1$$

$$p_1 = j \quad p_2 = -j \quad p_3 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \qquad p_4 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$$

Concludendo:

- per $0 < K < 5$ il sistema presenta 4 poli con parte reale negativa ed è asintoticamente stabile;
- per K = 5 il sistema presenta 2 poli reali negativi e due poli complessi coniugati con parte reale nulla quindi è semplicemente stabile;

- per $K < 0,\ K > 5$ il sistema è instabile;
- per $K = 0\ \ G(s) = 0$.

Consideriamo adesso l'errore di velocità del sistema. Troviamo la funzione di trasferimento tra l'ingresso X(s) e l'errore E(s) servendoci del seguente circuito equivalente:

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + H(s)B(s)A(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{s+1}{s+3} \cdot \frac{K}{s^2 + 2s}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{s+1}{s+3} \cdot \frac{K}{s(s+2)}} = \frac{1}{\frac{s^2(s+3)(s+2) + K(s+1)}{s^2(s+3)(s+2)}} =$$

$$= \frac{s^2(s+3)(s+2)}{s^2(s+3)(s+2) + K(s+1)}$$

Per trovare l'errore di velocità dobbiamo considerare un ingresso a rampa:

$$X(s) = \frac{1}{s^2}$$

Quindi:

$$E(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s^2(s+3)(s+2)}{s^2(s+3)(s+2) + K(s+1)} = \frac{(s+3)(s+2)}{s^2(s+3)(s+2) + K(s+1)}$$

L'errore di velocità a regime è dato da:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+3)(s+2)}{s^2(s+3)(s+2) + K(s+1)} = \lim_{s\to 0} \frac{6s}{Ks + K} = 0$$

L'errore di velocità è nullo per qualsiasi valore di K.

Matilde Consales