Quesito 4

Si vuole controllare la temperatura presente all'interno di un reattore chimico. La funzione di trasferimento del reattore è data da:

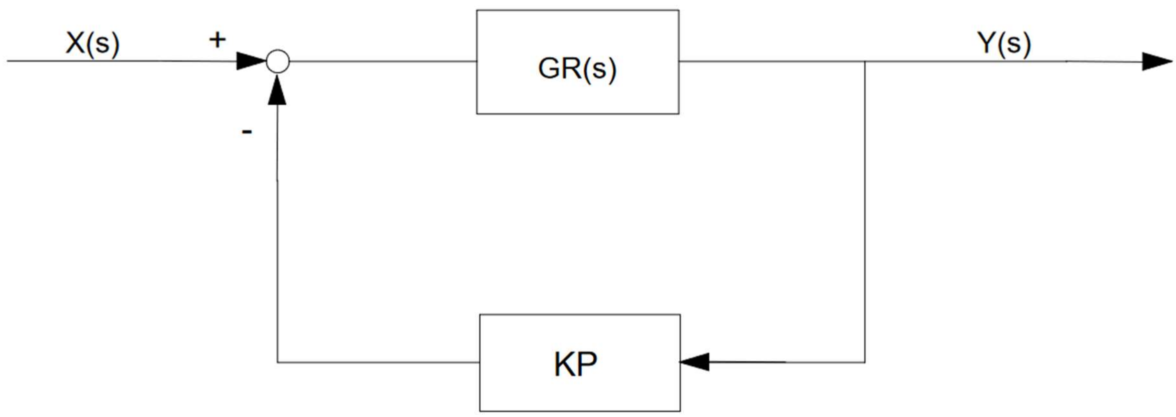
$$G_R(s) = \frac{1}{(s+3)^2(s-1)}$$

Il reattore è inserito in un sistema di controllo a controreazione nel quale è presente un regolatore proporzionale avente guadagno K_P; il ramo di feedback presenta guadagno unitario.

Ciò premesso il candidato, dopo aver disegnato lo schema a blocchi del sistema, determini per quali valori del guadagno K_P il sistema può ritenersi stabile.

Svolgimento

Schema a blocchi del sistema:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_R(s)}{1+K_P G_R(s)} =$$

Sostituendo le funzioni di trasferimento dei vari blocchi si ottiene:

$$= \frac{\frac{1}{(s+3)^2(s-1)}}{1+\frac{K_P}{(s+3)^2(s-1)}} = \frac{\frac{1}{(s+3)^2(s-1)}}{\frac{(s+3)^2(s-1)+K_P}{(s+3)^2(s-1)}} =$$

$$= \frac{1}{(s^2+6s+9)(s-1)+K_P} = \frac{1}{s^3+6s^2+9s-s^2-6s-9+K_P} =$$

$$= \frac{1}{s^3+5s^2+3s-9+K_P}$$

Ricordiamo che un sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale fratta come quello in esame è asintoticamente stabile se e solo se tutti i poli hanno parte reale negativa. È semplicemente stabile se e solo se non presentano alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici. Non è agevole calcolare i poli della funzione di trasferimento del sistema proposto quindi dobbiamo studiarne il segno al variare del parametro K_P ricorrendo al criterio di Routh.

Scriviamo l'equazione caratteristica della funzione di trasferimento:

$$s^3+5s^2+3s+K_P-9=0$$

Costruiamo la tabella di Routh.
Nella prima riga (numero 3) si trascrivono i coefficienti delle potenze dispari a partire dal grado più alto. Nella seconda riga (numero 2) si trascrivono i coefficienti delle potenze pari sempre a partire dal grado più alto.

Numero riga		
3	1	3
2	5	$K_P - 9$

Per costruire la riga successiva procediamo come segue. Il primo elemento a sinistra si ricava dalla relazione:

$$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & K_P - 9 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-(K_P - 9 - 15)}{5} = \frac{24 - K_P}{5}$$

Numero riga		
3	1	3
2	5	$K_P - 9$
1	$\frac{24 - K_P}{5}$	

Moltiplichiamo la riga 1 per 5 per eliminare il denominatore (il risultato non cambia):

Numero riga		
3	1	3
2	5	$K_P - 9$
1	$24 - K_P$	

Calcoliamo l'unico elemento della riga 0:

$$\frac{-\begin{vmatrix} 5 & K_P - 9 \\ 24 - K_P & 0 \end{vmatrix}}{24 - K_P} = \frac{-\left[\left(0 - (K_P - 9)(24 - K_P)\right)\right]}{24 - K_P} = K_P - 9$$

Riportiamo i valori trovati nella tabella:

Numero riga		
3	1	3
2	5	$K_P - 9$
1	$24 - K_P$	0
0	$K_P - 9$	

Teorema: Ad ogni variazione di segno che presentano i dati della prima colonna della tabella corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.
Il sistema è asintoticamente stabile se tutti i poli hanno parte reale negativa: se la prima colonna della tabella di Routh non presenta variazioni. Ma allora tutti i dati della prima colonna devono essere positivi. Troviamo *K* risolvendo il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 24 - K_P > 0 \\ K_P - 9 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_P < 24 \\ K_P > 9 \end{cases}$$

Il sistema presenta tutti i poli con parte reale negativa e, pertanto, è stabile per $9 < K_P < 24$.

Matilde Consales