

Esercizio 2

Il candidato realizzi un circuito logico che permetta di effettuare la somma di due numeri binari da un bit ciascuno e che presenti, oltre all'uscita somma, anche quella di riporto. Sfruttando il circuito ottenuto, il candidato realizzi un sommatore completo per numeri a 4 bit.

Svolgimento

Dobbiamo realizzare un dispositivo che effettui l'addizione binaria tra due bit. Avremo bisogno di due ingressi che nominiamo A e B. Analizziamo tutti i possibili valori.

1. $A = 0; B = 0 \rightarrow A + B = 0;$
2. $A = 0; B = 1 \rightarrow A + B = 1;$
3. $A = 1; B = 0 \rightarrow A + B = 1;$
4. $A = 1; B = 1 \rightarrow A + B = 0$ con riporto di 1.

Abbiamo bisogno anche di due uscite: una, che chiamiamo S che rappresenta la somma ed una, che chiamiamo C (Carry bit) che rappresenta il riporto.

Questo dispositivo prende il nome di *half-adder*.

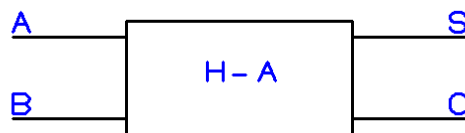


Figura 1 Half-Adder

Scriviamo la tabella della verità:

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Si trova:

$$\begin{cases} S = A \oplus B \\ C = A \cdot B \end{cases}$$

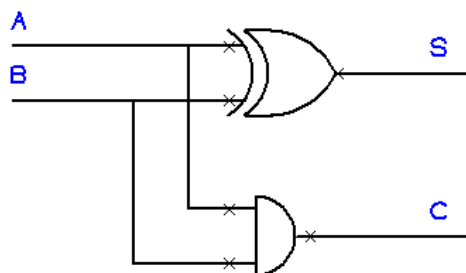


Figura 2 Schema di un Half-Adder.

¹ Il simbolo \oplus indica l'operatore XOR. Il simbolo \cdot indica l'operatore AND.

Adesso vogliamo realizzare un dispositivo in grado di effettuare la somma di due operandi costituiti da più bit. Questa operazione va eseguita *bit per bit* a partire da quello meno significativo. Abbiamo bisogno di un dispositivo con tre ingressi per tener conto dell'eventuale riporto (Carry) e due uscite (la somma e il riporto).

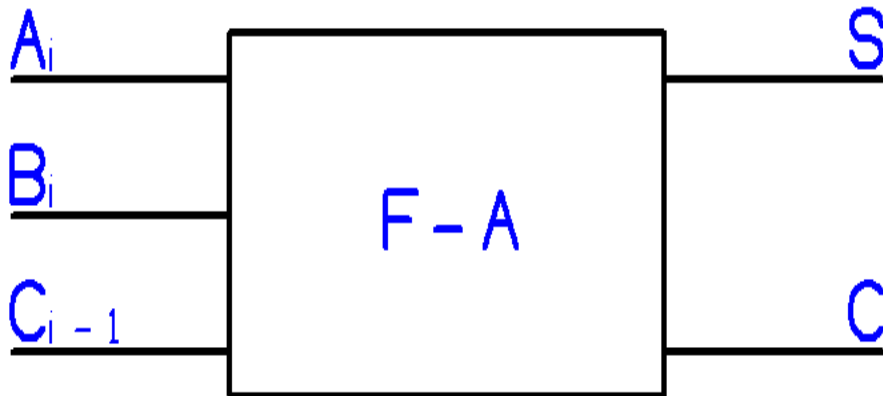


Figura 3 Full-Adder

Scriviamo la tabella della verità:

A_i	B_i	C_{i-1}	S_i	C_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Scriviamo l'espressione booleana delle due funzioni S_i e C_i . Esistono vari modi per ricavare l'espressione booleana di una funzione a partire dalla tabella della verità. Qui uso il metodo che costruisce l'espressione booleana in forma di OR (simbolo +) di tanti termini quante sono le combinazioni dei valori degli ingressi in corrispondenza dei quali la funzione assume il valore 1 (Minterm). Per ciascuna di queste combinazioni il corrispondente termine è costituito dall'AND (simbolo \cdot) di tutte le variabili presenti in ingresso negate oppure no a seconda che, nella particolare combinazione considerata, esse compaiano con il valore 0 oppure 1.

Consideriamo la funzione S_i .

Prima riga:

$$A_i = 0 \quad B_i = 0 \quad C_{i-1} = 0 \quad \rightarrow \quad S_i = 0$$

Questa combinazione non fornisce un contributo nell'espressione di S_i .

Seconda riga:

$$A_i = 0 \quad B_i = 0 \quad C_{i-1} = 1 \quad \rightarrow \quad S_i = 1$$

Questa espressione fornisce il termine:

$$\bar{A}_i \cdot \bar{B}_i \cdot C_{i-1}$$

Continuando con questo metodo si ottiene:

$$S_i = \bar{A}_i \cdot \bar{B}_i \cdot C_{i-1} + \bar{A}_i \cdot B_i \cdot C_{i-1} + A_i \cdot \bar{B}_i \cdot C_{i-1} + A_i \cdot B_i \cdot C_{i-1}$$

Semplifichiamo questa espressione. Raccolgo il fattore comune dai termini evidenziati:

$$S_i = (\bar{A}_i \cdot \bar{B}_i + A_i \cdot B_i) \cdot C_{i-1} + (\bar{A}_i \cdot B_i + A_i \cdot \bar{B}_i) \cdot \overline{C_{i-1}}$$

Ricordando che:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B = \overline{A \oplus B} \quad e \quad \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \oplus B$$

Troviamo:

$$S_i = (\overline{A_i \oplus B_i}) \cdot C_{i-1} + (A_i \oplus B_i) \cdot \overline{C_{i-1}}$$

Applicando nuovamente la stessa regola si ha:

$$S_i = (A \oplus B) \oplus C_{i-1}$$

Consideriamo adesso la funzione C_i :

Utilizzando il metodo visto prima si trova:

$$C_i = \bar{A}_i \cdot B_i \cdot C_{i-1} + A_i \cdot \bar{B}_i \cdot C_{i-1} + A_i \cdot B_i \cdot \overline{C_{i-1}} + A_i \cdot B_i \cdot C_{i-1}$$

Raccogliamo i fattori comuni dei termini evidenziati:

$$C_i = (\bar{A}_i \cdot B_i + A_i \cdot \bar{B}_i) \cdot C_{i-1} + A_i \cdot B_i \cdot (\overline{C_{i-1}} + C_{i-1})$$

Ma:

$$\overline{C_{i-1}} + C_{i-1} = 1$$

Quindi:

$$C_i = (A_i \oplus B_i) \cdot C_{i-1} + A_i \cdot B_i$$

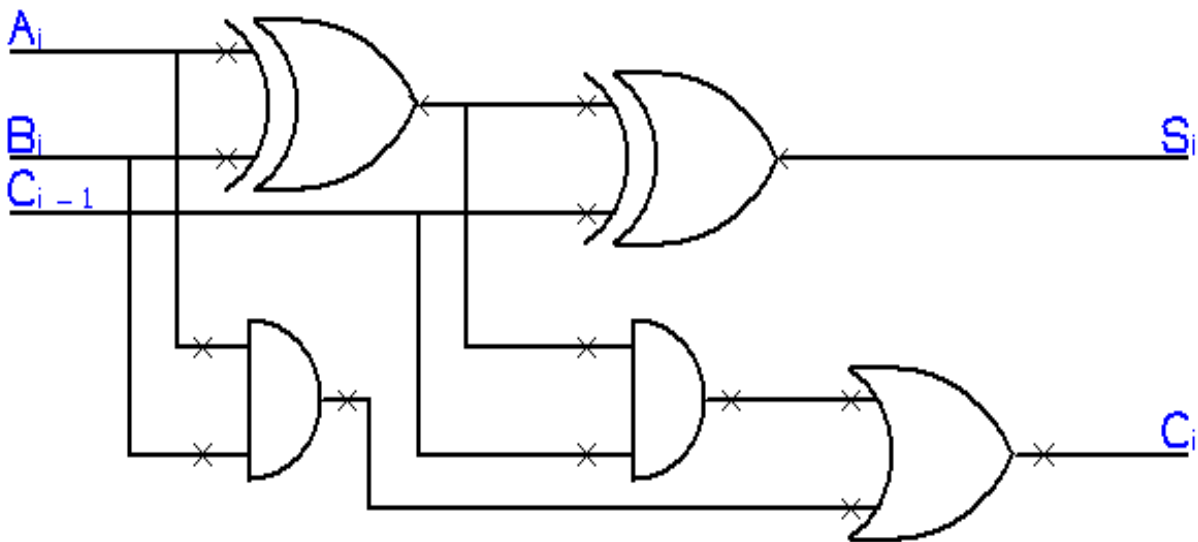


Figura 4 Schema di un Full-Adder

Per sommare operandi costituiti da più di un bit dobbiamo usare un Full-Adder per ogni coppia di bit. Si ottiene un sommatore binario (Binary Adder). Per sommare, come richiesto, numeri binari di 4 abbiamo bisogno di 4 full adder (ciascuno per sommare 1 bit). Lo schema è rappresentato in figura 5.

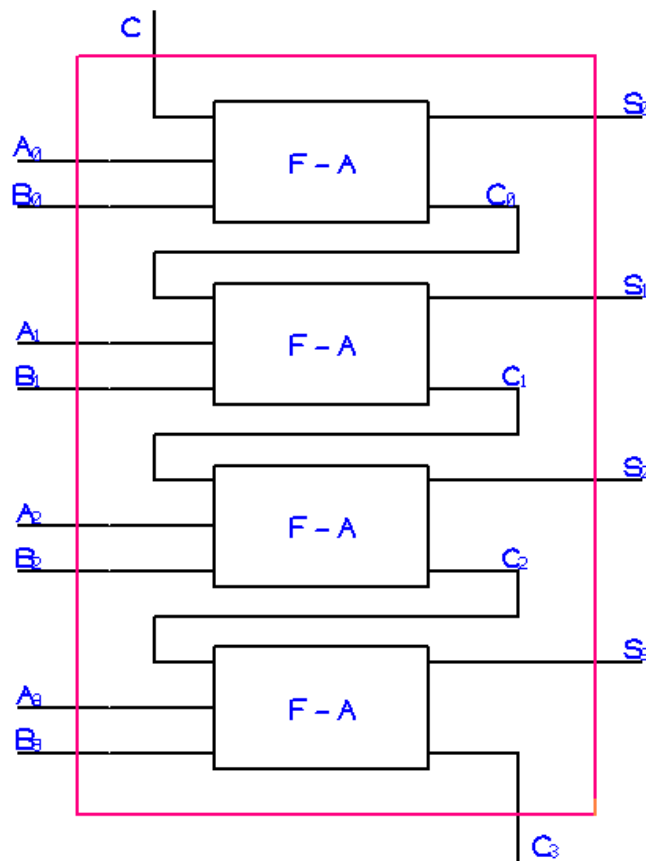


Figura 5 Un sommatore binario a 4 bit.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.
Matilde Consales