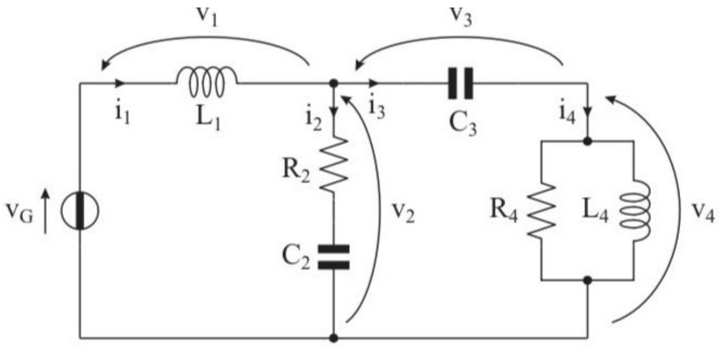
Esercizio 8



$L_1 = 20$ mH
$R_2 = 20\ \Omega$
$C_2 = 25\ \mu$F
$C_3 = 25\ \mu$F
$R_4 = 100\ \Omega$
$L_4 = 50$ mH
$v_G(t) = 120\,\text{sen}(1000t)$ V

Determinare le tensioni e le correnti indicate in figura e la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore.

Svolgimento

Determiniamo l'impedenza formata dal parallelo del resistore R_4 e dell'induttore L_4:

$$Z_4 = \frac{R_4(j\omega L_4)}{R_4 + j\omega L_4} = \frac{100(j1000 \cdot 50 \cdot 10^{-3})}{100 + j1000 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = \frac{j5000}{100 + j50}$$

Dividiamo per 50 e razionalizziamo:

$$Z_4 = \frac{j100(2 - j)}{(2 + j)(2 - j)} = \frac{100 + j200}{5} = (20 + j40)\Omega$$

Ridisegniamo il circuito:

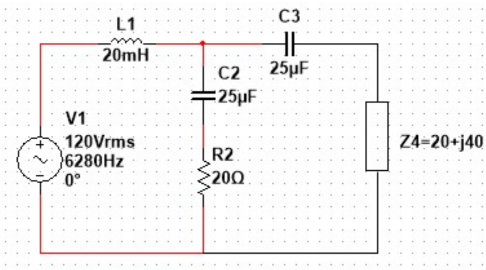


Figura 1

Aggiungiamo ora il condensatore C_3 in serie:

$$Z_3 = Z_4 - \frac{j}{\omega C_3} = 20 + j40 - \frac{j}{1000 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 20 + j40 - j40 = 20\Omega$$

Lo schema diventa:

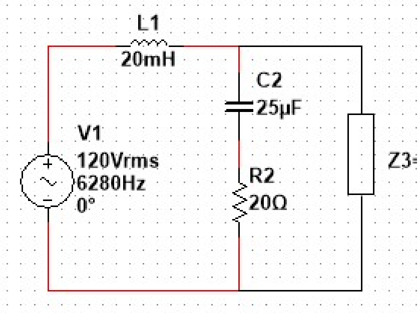


Figura 2

Calcoliamo adesso il parallelo di Z_3 con la serie C_2-R_2:

$$Z_2 = \frac{\left(-\frac{j}{\omega C_2} + R_2\right) Z_3}{-\frac{j}{\omega C_2} + R_2 + Z_3} = \frac{(-j40 + 20) \cdot 20}{-j40 + 20 + 20} = \frac{-j800 + 400}{40 - j40} =$$

Per semplificare i calcolo divido numeratore e denominatore per 40:

$$= \frac{10 - j20}{1 - j}$$

Razionalizziamo:

$$Z_2 = \frac{(10 - j20)(1 + j)}{(1 - j)(1 + j)} = \frac{10 + j10 - j20 + 20}{2} = \frac{30 - j10}{2} = (15 - j5)\Omega$$

Ridisegniamo lo schema:

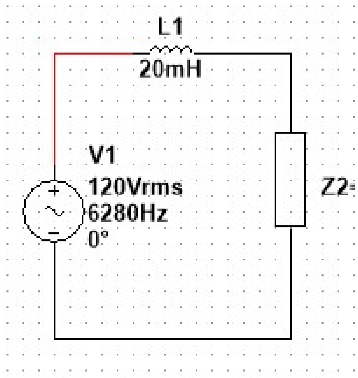


Figura 3

Adesso possiamo determinare $\overline{V_1}$ e $\overline{V_2}$. Dallo schema vediamo che è un partitore di tensione quindi:

$$\overline{V_1} = \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + Z_2} \overline{V_G}$$

dove

$$\overline{V_G} = 120(\cos 0° + j sin 0°) = 120V$$

Quindi:

$$\overline{V_1} = \frac{j1000 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{j1000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} + 15 - j5} 120 = \frac{j20}{15 + j15} 120 = \frac{j4}{3 + j3} 120 = \frac{j4}{1 + j} 40$$

Razionalizziamo:

$$\overline{V_1} = \frac{j4(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)} 40 = \frac{4 + j4}{2} 40 = (80 + j80)V$$

Scriviamo la forma trigonometrica:

$$|\overline{V_1}| = \sqrt{80^2 + 80^2} = 80\sqrt{2}V$$

$$\varphi_{V_1} = arctg \frac{80}{80} = arctg(1) = 45°$$

$$v_1(t) = 80\sqrt{2} \sin(1000t + 45°)V$$

Troviamo la corrente con la legge di Ohm generalizzata:

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{V_1}}{j\omega L_1} = \frac{80 + j80}{j20} = \frac{4 + j4}{j} = \frac{j(4 + j4)}{-1} = \frac{-4 + j4}{-1} = (4 - j4)A$$

Scriviamo la forma trigonometrica:

$$|\overline{I_1}| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}A$$

Per la fase osserviamo che ci troviamo nel quarto quadrante:

$$\varphi_{I_1} = arctg\frac{-4}{4} = arctg(-1) = -45°$$

$$i_1(t) = 4\sqrt{2}\sin(1000t - 45°)$$

Osserviamo adesso che la tensione ai capi di Z_2 è uguale a quella della serie R_2-C_2. Possiamo, quindi, calcolarla con il secondo principio di Kirchhoff alla maglia di Figura 3

$$\overline{V_G} = \overline{V_1} + \overline{V_2} \quad \rightarrow \quad \overline{V_2} = \overline{V_G} - \overline{V_1}$$

$$\overline{V_2} = 120 - 80 - j80 = (40 - j80)V$$

Scriviamo la forma trigonometrica:

$$|\overline{V_2}| = \sqrt{40^2 + 80^2} = 40\sqrt{5}V$$

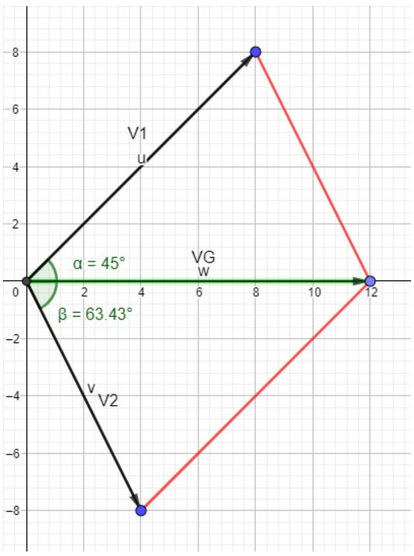
$$\varphi_{V_2} = arctg\frac{-80}{40} = arctg(-2) \approx -63°$$

$$v_2(t) = 40\sqrt{5}\sin(1000t - 63°)V$$

Possiamo determinare la corrente $\overline{I_2}$ che scorre nella serie R_2-C_2 con la legge di Ohm generalizzata:

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{V_2}}{R_2 - jX_{C2}} = \frac{40 - j80}{20 - j40} = \frac{2 - j4}{1 - j2} = \frac{(2 - j4)(1 + j2)}{(1 - j2)(1 + j2)} = \frac{2 + j4 - j4 + 8}{5} = \frac{10}{5} = 2A$$

$$i_2(t) = 2\sin(1000t)\ A$$



Dal grafico possiamo vedere che la somma vettoriale delle tensioni $\overline{V_1}$e$\overline{V_2}$ corrisponde alla tensione $\overline{V_G}$.

Dalla figura 2 osserviamo che l'impedenza Z_3 ha, ai suoi capi, la tensione V_2 calcolata in precedenza ed è costituita dalla serie del condensatore C_3 e dell'impedenza Z_4 (come si vede in figura 1). Possiamo, quindi, usare il partitore di tensione per determinare la tensione V_3 che è ai capi del condensatore C_3.

$$\overline{V_3} = \frac{-jX_{C_3}}{Z_4 - jX_{C_3}}\overline{V_2} = \frac{-j40}{20 + j40 - j40}(40 - j80) = \frac{-j40}{20}(40 - j80) =$$

$$= -j2(40 - j80) = (-160 - j80)V$$

Scriviamo la forma trigonometrica:

$$|\overline{V_3}| = \sqrt{160^2 + 80^2} = 80\sqrt{5}V$$

$$\varphi_{V_3} = arctg\frac{-80}{-160} = arctg(2) \approx 243°$$

$$v_3(t) = 80\sqrt{5}\sin(1000t + 243°)V$$

Determiniamo la corrente $\overline{I_3}$ cha attraversa il condensatore C_3 con la legge di Ohm generalizzata:

$$\overline{I_3} = \frac{\overline{V_3}}{-jX_{C_3}} = \frac{-160 - j80}{-j40} = \frac{4 + j2}{j} = \frac{j(4 + j2)}{j^2} = \frac{-2 + j4}{-1} = (2 - j4)A$$

Scriviamo la forma trigonometrica:

$$|\overline{I_3}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}A$$

$$\varphi_{I_3} = arctg\frac{-4}{2} = arctg(-2) \approx -63°$$

$$i_3(t) = 2\sqrt{5}\sin(1000t - 63°)A$$

Osserviamo, dalla figura 1, che il condensatore C_3 e l'impedenza Z_4 (costituita dal parallelo dell'induttore L_4 e del resistore R_4) sono in serie quindi sono attraversati dalla stessa corrente: $\overline{I_3} = \overline{I_4}$.
Ci rimane da calcolare la tensione $\overline{V_4}$. Possiamo usare il secondo principio di Kirchhoff. Dalla figura 1 si vede che:

$$\overline{V_2} = \overline{V_3} + \overline{V_4} \quad \rightarrow \quad \overline{V_4} = \overline{V_2} - \overline{V_3}$$

$$\overline{V_4} = 40 - j80 - (-160 - j80) = 200V$$

Scriviamo la forma trigonometrica:

$$v_4(t) = 200sin(1000t)V$$

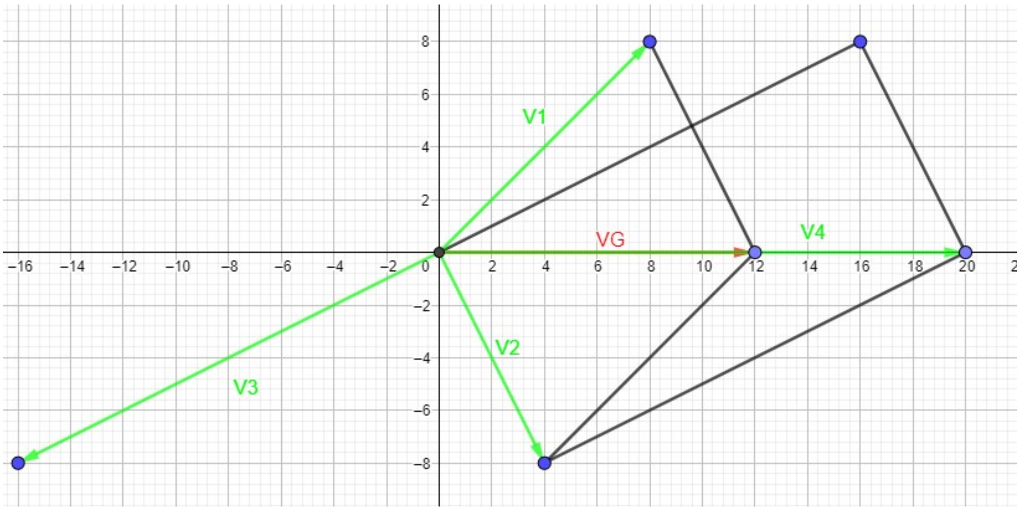


Figura 4 Grafico vettoriale delle tensioni.

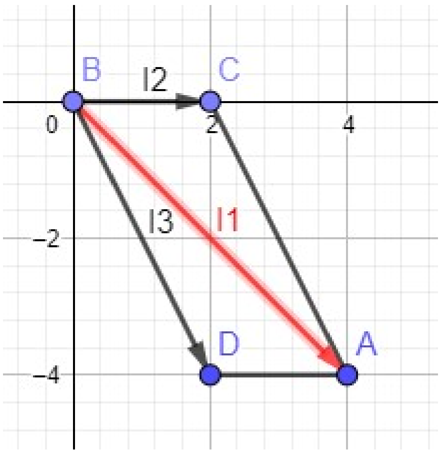


Figura 5 Grafico delle correnti.

Potenza attiva erogata dal generatore (osserviamo che la corrente erogata dal generatore è $\overline{I_1}$):

$$P_G = V_{Geff} \cdot I_{Geff} cos\varphi_{eff} = \frac{120}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} cos(-45°) = 240W$$

Potenza reattiva erogata dal generatore:

$$Q_G = V_{Geff} \cdot I_{Geff} sin\varphi_{eff} = \frac{120}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} sin(-45°) = -240VAR$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales