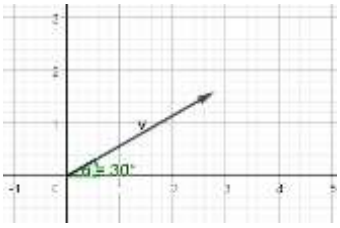
Esercizio 7

Una pallina, lanciata da un'altezza h con velocità di modulo v_o=10 m/s e angolo pari a 30°, colpisce il suolo dopo 3.5s. Si determini h, la massima altezza raggiunta.

Svolgimento

La pallina si muove su un piano: il suo moto avviene lungo due direzioni. Lungo l'asse delle ascisse si muove di moto rettilineo uniforme (infatti non agiscono forze) mentre lungo l'asse delle ordinate si muove di moto uniformemente accelerato perché è soggetta alla forza di gravità.
Troviamo le componenti della velocità iniziale lungo i due assi cartesiani.



$$v_x = v_0 cos30° = 10 \cdot 0.866 = 8.6m/s$$

$$v_y = v_0 sin30° = 10 \cdot 0.5 = 5m/s$$

Scriviamo adesso le equazioni dei moti.
Lungo l'asse *x* la pallina si muove di moto rettilineo uniforme. Scriviamo la legge oraria di questo moto:

$$x = x_0 + v_x t$$

Lungo l'asse *y* la pallina si muove di moto uniformemente accelerato. Scriviamo la legge oraria di questo moto (asse y verso l'alto):

$$y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

La pallina si muove sul piano *xy* quindi dobbiamo scrivere il sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Nell'istante in cui tocca terra $y = 0$, $t = 3.5s$. Ricordando che $y_0 = h$ e sostituendo nella seconda equazione del sistema si ottiene:

$$0 = h + 5 \cdot 3.5 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 3.5^2$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 3.5^2 - 5 \cdot 3.5 = 4.9 \cdot 12.25 - 5 \cdot 3.5 = 42.5m$$

Per quanto riguarda le velocità valgono le relazioni:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = v_{y0} - gt \end{cases}$$

Da queste relazioni possiamo trovare in che istante la pallina raggiunge l'altezza massima. Notiamo che in questo istante la pallina avrà velocità nulla rispetto all'asse *y*. Sostituendo i valori numerici si trova:

$$\begin{cases} v_x = 8.6 \\ 0 = 5 - 9.8t \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$t = \frac{5}{9{,}8} = 0.5s$$

Possiamo ricavare l'altezza massima raggiunta dalla legge oraria del moto lungo l'asse delle ordinate ricordando che:

$$y_0 = h = 42.5m; \quad t = 0.5s; \quad v_{0y} = 5m/s$$

$$y_{MAX} = 42.5 + 5 \cdot 0.5 - \frac{1}{2}9.8 \cdot 0.5^2 = 42.5 + 2.5 - 4.9 \cdot 0.25 = 43.8m$$

Per disegnare la traiettoria della pallina sul piano *xy* determiniamo 5 punti e disegniamo la parabola con geogebra. Per trovare i 3 punti ci serviamo del sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Troviamo i valori di *x* e *y* nell'istante iniziale *t=0s*. Si ha:

$$t = 0s; \;\; x_0 = 0m; \;\; v_{0x} = 8.6\, m/s\,; \;\; y_0 = 42.5m; \;\; v_{0y} = 0.5\, m/s$$

Sostituendo:

$$\begin{cases} x = 0 + 8.6 \cdot 0 = 0 \\ y = 42.5 + 5 \cdot 0 - \frac{1}{2}9.8 \cdot 0^2 = 42.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 42.5 \end{cases}$$

Sappiamo che per *t=0.5s* la pallina raggiunge l'altezza massima. Troviamo questo punto:

$$t = 0.5s; \;\; x_0 = 0m; \;\; v_{0x} = 8.6\, m/s\,; \;\; y_0 = 42.5m; \;\; v_{0y} = 0.5\, m/s$$

Sostituendo:

$$\begin{cases} x = 0 + 8.6 \cdot 0.5 = 4.3 \\ y = 42.5 + 5 \cdot 0.5 - \frac{1}{2}9.8 \cdot 0.5^2 = 43.8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4.3 \\ y = 43.8 \end{cases}$$

Infine sappiamo che tocca terra quando *t=3.5s*. Possiamo determinare anche questo punto:

$$t = 3.5s; \;\; x_0 = 0m; \;\; v_{0x} = 8.6\, m/s\,; \;\; y_0 = 42.5m; \;\; v_{0y} = 0.5\, m/s$$

Sostituendo:

$$\begin{cases} x = 0 + 8.6 \cdot 3.5 = 30.1 \\ y = 42.5 + 5 \cdot 3.5 - \frac{1}{2}9.8 \cdot 3.5^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 30.1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato la gittata *x=30.1m*.

Troviamo altri due punti. Ad esempio per *t=1.5*:

$$t = 1.5s;\ \ x_0 = 0m;\ \ \ v_{0x} = 8.6\,m/s\,;\ \ \ y_0 = 42.5m;\ \ \ v_{0y} = 0.5\,m/s$$

Sostituendo:

$$\begin{cases} x = 0 + 8.6 \cdot 1.5 = 12.9 \\ y = 42.5 + 5 \cdot 1.5 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 1.5^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 12.9 \\ y = 39.0 \end{cases}$$

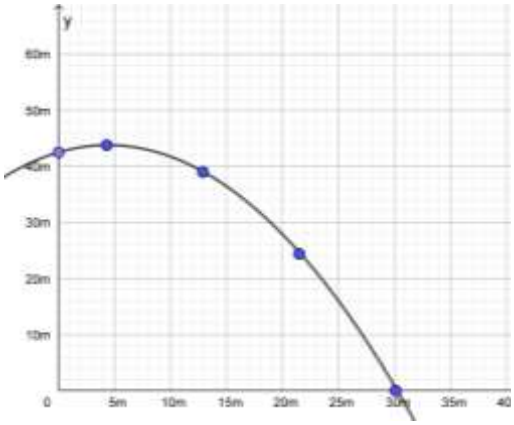
E per *t=2.5*:

$$t = 2.5s;\ \ x_0 = 0m;\ \ \ v_{0x} = 8.6\,m/s\,;\ \ \ y_0 = 42.5m;\ \ \ v_{0y} = 0.5\,m/s$$

Sostituendo:

$$\begin{cases} x = 0 + 8.6 \cdot 2.5 = 21.5 \\ y = 42.5 + 5 \cdot 2.5 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 2.5^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 21.5 \\ y = 24.4 \end{cases}$$

Riportiamo questi punti sul piano con geogebra e disegniamo la traiettoria:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.
Matilde Consales