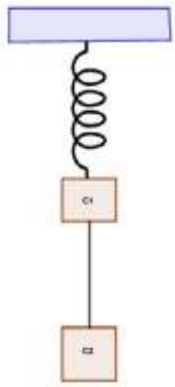
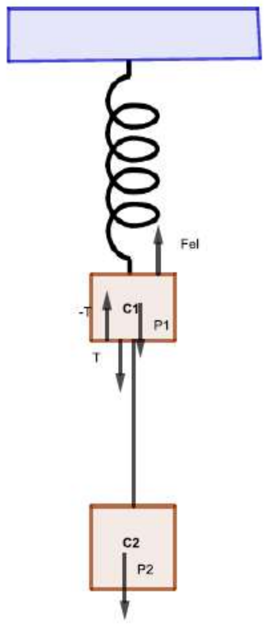
Esercizio 11

Nel sistema in figura, i corpi C1 e C2, con masse $m_1 = m_2 = 3.0$ kg, sono inizialmente fermi in una posizione in cui la molla, di constante elastica 33N/m, è allungata rispetto alla lunghezza di riposo di Δl e quindi iniziano ad oscillare. Calcolare il valore massimo di tale allungamento oltre il quale il filo tra C_1 e C_2 non si mantiene teso durante l'oscillazione.



Svolgimento

Consideriamo un corpo alla volta e consideriamo le forze a cui è sottoposto e rappresentiamole graficamente.



Forze che agiscono sul corpo 1:

- Forza peso P_1;
- Tensione del filo T;
- Forza di elastica F_{el}.

Forze che agiscono sul corpo 2:

- Forza peso P_2;
- Tensione del filo T.

In base alle osservazioni fatte scriviamo le equazioni vettoriali per determinare la risultante di tutte le forze che agiscono su ciascun corpo.

$$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{P_1} + \vec{T} + \overrightarrow{F_{el}} \quad Corpo\ C_1$$

$$\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{P_2} + \vec{T} \quad Corpo\ C_2$$

I pesi dei corpi sono dati da:

$$\overrightarrow{P_i} = m_i \vec{g} \quad con\ i = 1,2,3$$

Le forze risultanti sono date da:

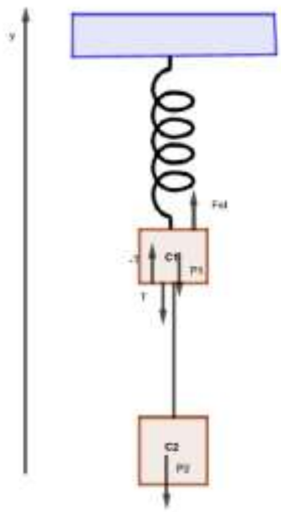
$$\overrightarrow{F_i} = m_i \overrightarrow{a_i} \quad con\ i = 1,2,3$$

Facciamo le sostituzioni:

$$m_1 \overrightarrow{a_1} = m_1 \vec{g} + \vec{T} + \overrightarrow{F_{el}} \quad Corpo\ C_1$$

$$m_2 \overrightarrow{a_2} = m_2 \vec{g} + \vec{T} \quad Corpo\ C_2$$

A questo punto dobbiamo scegliere un sistema di riferimento per scrivere le equazioni considerando le componenti lungo gli assi.



Adesso scriviamo le equazioni usando il sistema di riferimento scelto:

$$m_1 a_{1y} = F_{el} - T - m_1 g$$

$$m_2 a_{2y} = T - m_2 g$$

Scriviamo l'espressione della forza elastica:

$$F_{el} = -k(y_1 - y_{10})$$

Dove y_1 è la coordinata del corpo 1 e y_{10} è la coordinata iniziale del corpo 1. Ricordiamo che nell'istante iniziale la molla è allungata. Quindi:

$$\begin{cases} m_1 a_{1y} = -k(y_1 - y_{10}) - T - m_1 g \\ \\ m_2 a_{2y} = T - m_2 g \end{cases}$$

C'è un solo vincolo: il filo inestensibile (lunghezza fissa) quindi la differenza tra le coordinate dei due corpi deve essere costante ed uguale alla lunghezza del filo.

$$y_1 - y_2 = L_f$$

Derivando due volte per ottenere l'accelerazione si trova:

$$\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_2}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}-\frac{d^2y_2}{dt^2}=0 \quad \rightarrow \quad a_{1y}=a_{2y}$$

Infatti se il filo è teso il moto dei due corpi è sincrono. Il sistema di equazioni diventa:

$$\begin{cases} m_1a_{1y}=-k(y_1-y_{10})-T-m_1g \\ m_2a_{1y}=T-m_2g \end{cases}$$

Le incognite sono: la tensione del filo, l'accelerazione e la coordinata del corpo C_1.
È un sistema di equazioni differenziali infatti come incognite compaiono sia la coordinata del corpo C_1 che la sua accelerazione. Per risolverlo sommiamo membro a membro le due equazioni così eliminiamo l'incognita T:

$$\begin{cases} m_1a_{1y}+m_2a_{1y}=-k(y_1-y_{10})-m_1g-m_2g \\ m_2a_{1y}=T-m_2g \end{cases}$$

Consideriamo la prima equazione:

$$(m_1+m_2)\frac{d^2y_1}{dt^2}=-k(y_1-y_{10})-(m_1+m_2)g$$

I corpi non devono muoversi quindi le accelerazioni sono tutte nulle. Dividiamo ambo i membri per m_1+m_2

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=-\frac{k}{m_1+m_2}(y_1-y_{10})-g \qquad (1)$$

L'equazione è quella di un moto armonico con l'aggiunta di una costante dovuta al fatto che il punto di equilibrio non coincide con il punto in cui la molla è a riposo ma è spostato verso il basso a causa dell'allungamento imposto dalla forza peso. Troviamo il punto di equilibrio imponendo che la risultante delle forze e, quindi, l'accelerazione, sia nulla:

$$-\frac{k}{m_1+m_2}\left(y_{1eq}-y_{10}\right)-g=0$$

$$-\frac{k}{m_1+m_2}y_{1eq}+\frac{k}{m_1+m_2}y_{10}-g=0$$

$$y_{1eq}=y_{10}-\frac{m_1+m_2}{k}g$$

Facciamo una sostituzione di variabile:

$$z=y_1-y_{1eq}=y_1-y_{10}+\frac{m_1+m_2}{k}g$$

Adesso sostituiamo nella (1) tenendo presente che:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dy_1}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2y_1}{dt^2}$$

e

$$y_1-y_{10}=z-\frac{m_1+m_2}{k}g \quad (2)$$

Quindi:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m_1 + m_2}\left(z - \frac{m_1 + m_2}{k}g\right) - g$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m_1 + m_2}z + g - g$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m_1 + m_2}z = 0$$

È un'equazione omogenea del secondo ordine. Consideriamo l'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m_1 + m_2} = 0$$

Che ammette come soluzioni:

$$\lambda_{1-2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Le radici sono complesse coniugate quindi l'integrale generale è dato da:

$$z(t) = A_1 cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}t\right) + A_2 sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}t\right)$$

La pulsazione del moto è data da:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Quindi:

$$z(t) = A_1 cos(wt) + A_2 sin(wt)$$

Ma dalla (2):

$$z(t) = y_1(t) - y_{10} + \frac{m_1 + m_2}{k}g$$

Da cui

$$y_1(t) = A_1 cos(wt) + A_2 sin(wt) + y_{10} - \frac{m_1 + m_2}{k}g$$

Il corpo C_1 esegue oscillazioni armoniche intorno al punto di equilibrio. Per determinare le costanti A_1 e A_2 consideriamo le condizioni iniziali.

1. La velocità è nulla perché il corpo parte da fermo.

$$\frac{dy_1}{dt} = -A_1 w \cdot sin(wt) + A_2 \cdot w\, cos(wt)$$

$$v(0) = -A_1 w \cdot sin(0) + A_2 \cdot w\, cos(0) = 0$$

2. La molla è allungata di Δl rispetto alla posizione di riposo.

$$y_1(0) = A_1 cos(0) + A_2 sin(0) + y_{10} - \frac{m_1 + m_2}{k} g = y_{10} - \Delta l$$

$$A_1 + y_{10} - \frac{m_1 + m_2}{k} g = y_{10} - \Delta l$$

$$A_1 = \frac{m_1 + m_2}{k} g - \Delta l$$

$$A_2 \cdot w = 0 \quad \rightarrow \quad A_2 = 0$$

Possiamo scrivere l'integrale particolare:

$$y_1(t) = \left(\frac{m_1 + m_2}{k} g - \Delta l\right) cos(wt) + y_{10} - \frac{m_1 + m_2}{k} g$$

A questo punto possiamo trovare la tensione del filo in funzione del tempo. Ricordando che:

$$m_2 a_{1y} = T - m_2 g \quad \rightarrow \quad T = m_2\left(a_{1y} + g\right) \quad (3)$$

Per la velocità troviamo:

$$\frac{dy_1}{dt} = -w\left(\frac{m_1 + m_2}{k} g - \Delta l\right) sin(wt)$$

E per l'accelerazione:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -w^2\left(\frac{m_1 + m_2}{k} g - \Delta l\right) cos(wt)$$

Ricordando che:

$$w^2 = \frac{k}{m_1 + m_2}$$

Troviamo:

$$a_{1y} = -\frac{k}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_1 + m_2}{k} g - \Delta l\right) cos(wt) = \left(\frac{k\Delta l}{m_1 + m_2} - g\right) cos(wt)$$

Sostituendo nella (3):

$$T(t) = m_2\left[\left(\frac{k\Delta l}{m_1 + m_2} - g\right) cos(wt) + g\right]$$

Raccogliendo il fattore $m_2 g$:

$$T(t) = m_2 g\left[1 + \left(\frac{k\Delta l}{g(m_1 + m_2)} - 1\right) cos(wt)\right]$$

Notiamo che la tensione del filo si annulla in alcuni istanti. Osserviamo che la funzione coseno varia tra -1 e 1. Quando vale -1 si ottiene:

$$T(t) = m_2 g\left[1 - \frac{k\Delta l}{g(m_1 + m_2)} + 1\right] = m_2 g\left[2 - \frac{k\Delta l}{g(m_1 + m_2)}\right] = 0$$

Da cui si ricava:

$$\frac{k\Delta l}{g(m_1 + m_2)} = 2 \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{2g(m_1 + m_2)}{k}$$

Quando vale 1 si ottiene:

$$T(t) = m_2 g \left[1 + \frac{k\Delta l}{g(m_1 + m_2)} - 1\right] = m_2 g \left[\frac{k\Delta l}{g(m_1 + m_2)}\right] = 0$$

Questa soluzione non è accettabile infatti se fosse $\Delta l = 0$ la molla sarebbe nella posizione di equilibrio.
Notiamo che per mantenere il filo teso durante il moto non si deve allungare la molla più del doppio di quanto sia allungata in condizioni di equilibrio.
Calcoliamo il valore dell'allungamento:

$$\Delta l = \frac{2g(m_1 + m_2)}{k} = \frac{2 \cdot 9.8(3.0 + 3.0)}{33} = 3.6m$$

Matilde Consales