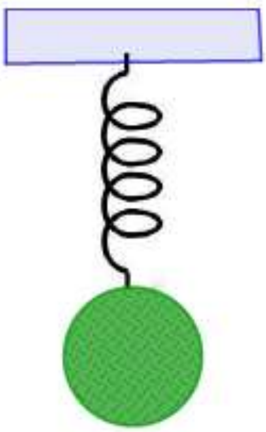
Esercizio 12

Una sfera di raggio *10cm* e densità $1200kg/m^3$ è appesa ad una molla ideale di costante elastica $k=0.8N/m$, il sistema è immerso in un fluido viscoso con densità $916kg/m^3$ e coefficiente di viscosità:

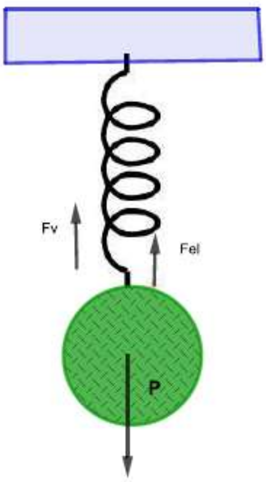
$$\eta = 8.4 \cdot 10^{-2} Pa \cdot s$$

Descrivere il moto.



Svolgimento

Consideriamo tutte le forze applicate alla sfera.



Forze che agiscono sulla sfera durante il moto:

- Forza peso P;
- Forza di elastica F_{el};
- Forza di attrito viscoso F_v.

Scriviamo l'equazione vettoriale per determinare la risultante di tutte le forze che agiscono sulla sfera.

$$\vec{F} = \vec{P} + \overrightarrow{F_{el}} + \vec{F_v}$$

Riscriviamo l'equazione vettoriale sostituendo ad ogni forza la sua relazione:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + k\vec{x} + \gamma\vec{v}$$

Calcoliamo la massa della sfera:

$$m = \rho V$$

Dove ρ è la densità e V il volume dato da:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(10^{-2})^3 m^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^{-6} m^3 = 4.19 \cdot 10^{-6} m^3$$

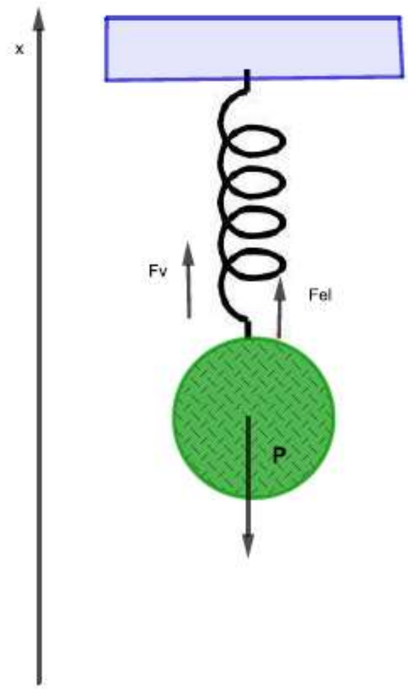
Troviamo la massa della sfera:

$$m = \rho V = 1200 \cdot 4.19 \cdot 10^{-6} kg = 5.02 \cdot 10^{-3} kg$$

La forza di attrito viscoso ha direzione parallela alla velocità e verso opposto. Il coefficiente γ, per una sfera, è definito dal teorema di Stokes e vale:

$$\gamma = 6\pi\eta r = 6\pi \cdot 8.4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 1.58 \cdot 10^{-2} kg/s$$

A questo punto dobbiamo scegliere un sistema di riferimento per scrivere le equazioni considerando le componenti lungo l'unico asse necessario a descrivere il moto. Inoltre abbiamo scelto come origine la posizione a riposo della molla e abbiamo tenuto conto del fatto che sia la forza elastica che l'attrito viscoso si oppongono al moto.



$$-F = -P + F_{el} + F_v$$

$$-ma = -mg + kx + \gamma v$$

Ricordando che:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad e \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Possiamo scrivere l'equazione differenziale a coefficienti costanti del secondo ordine che descrive il moto:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma\frac{dx}{dt} + kx - mg$$

Riordiniamo i termini e dividiamo ambo i membri per la massa *m* della sfera.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x-g=0$$

Consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$x^2+\frac{\gamma}{m}x+\frac{k}{m}=0$$

Prima di trovare le soluzioni sostituiamo i valori numerici:

$$x^2+\frac{1.58\cdot 10^{-2}}{5.02\cdot 10^{-3}}x+\frac{0.8}{5.02\cdot 10^{-3}}=0$$

$$x^2+3.15x+159=0$$

$$x_{1-2}=\frac{-3.15\pm\sqrt{3.15^2-4\cdot 159}}{2}=\frac{-3.15\pm\sqrt{-626.0775}}{2}=\frac{-3.15\pm i25.02}{2}$$

$$x_1=-1.57+i12.52 \qquad x_2=-1.57-i12.52$$

La soluzioni sono complesse coniugate quindi la soluzione generale è data da:

$$x(t)=e^{-1.57t}[c_1 sin(12.52t)+c_2 cos(12.52t)]$$

Per determinare la soluzione particolare non ci resta che aggiungere la costante:

$$x(t)=e^{-1.57t}[c_1 sin(12.52t)+c_2 cos(12.52t)]-g \quad (1)$$

Con le costanti arbitrarie da determinare in base alle condizioni iniziali: per t=0 la sfera è ferma e l'allungamento della molla è dovuto al peso.
Calcoliamo adesso la derivata prima:

$$\frac{dx}{dt}=-1.57e^{-1.57t}[c_1 sin(12.52t)+c_2 cos(12.52t)]+e^{-1.57t}\cdot 12.52c_1 cos(12.52t)-e^{-1.57t}\cdot 12.52c_2 sin(12.52t)$$

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-1.57t}[(1.57c_1+12.52c_2)sin(12.52t)+(1.57c_2-12.52c_1)cos(12.52t)] \quad (2)$$

Determiniamo l'allungamento della molla.

Forze che agiscono sulla sfera a riposo:

- Forza peso P;
- Forza di elastica F_{el};
- Spinta di Archimede F_a.

Scriviamo l'equazione vettoriale ricordando che la sfera è ferma:

$$\vec{P}+\overrightarrow{F_{el}}+\overrightarrow{F_a}=0$$

Scriviamo l'equazione riferita all'asse di riferimento scelto:

$$-mg+kx+F_a=0 \quad \rightarrow \quad |x|=\frac{mg-F_a}{k}$$

Determiniamo la spinta di Archimede:

$$F_a=\rho_f Vg$$

Dove V è il volume della sfera e ρ_f la densità del fluido in cui il sistema è immerso.

$$F_a = 916 \cdot 4.19 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8 = 3.76 \cdot 10^{-2} N$$

La forza peso della sfera vale:

$$P = mg = 5.02 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8 = 4.92 \cdot 10^{-2} N$$

Allungamento a riposo:

$$x(0) = \frac{mg - F_a}{k} = \frac{4.92 \cdot 10^{-2} - 3.76 \cdot 10^{-2}}{0.8} m = -1{,}16 \cdot 10^{-2} m$$

Determiniamo le costanti in base alle condizioni iniziali. Per la posizione della molla usiamo la (1):

$$x(0) = e^0[c_1 sin0 + c_2 cos0] - g = -1{,}16 \cdot 10^{-2}$$

$$c_2 - 9.8 = -1{,}16 \cdot 10^{-2} \quad \rightarrow \quad c_2 = 9.8 - 1{,}16 \cdot 10^{-2} = 9.79$$

Per la velocità iniziale usiamo la (2)

$$v(0) = -e^0[(1.57c_1 + 12.52 \cdot 9.79) sin(0) + (1.57 \cdot 9.79 - 12.52c_1) cos(0)] = 0$$

$$-15.37 + 12.52c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{15.37}{12.52} = 1.23$$

Possiamo finalmente scrivere la legge oraria del moto:

$$x(t) = e^{-1.57t}[1.23 sin(12.52t) + 9.79 cos(12.52t)] - 9.8$$

Si tratta di oscillazioni armoniche smorzate. Facciamo un grafico con Geogebra.

Matilde Consales