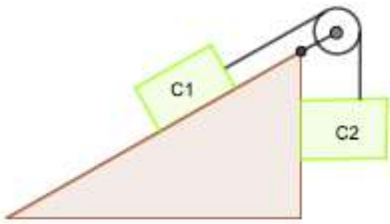
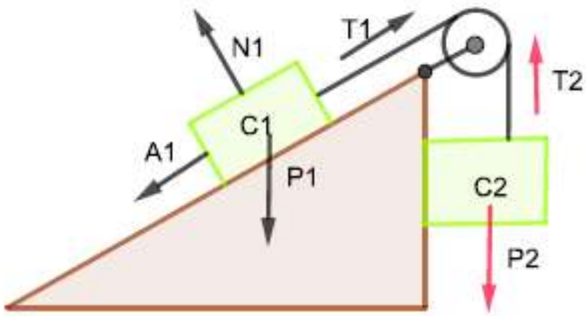
Esercizio 8

Il corpo C_1, che pesa 3kg, poggia su un piano inclinato di 30˚ ed è collegato, per mezzo di una corda e di una carrucola, al corpo C_2 anch'esso di 3kg. Determinare l'accelerazione del corpo C_2 sapendo che la superficie del piano inclinato è scabra e presenta un coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.2. Si suppone che la corda sia inestensibile e di peso trascurabile e che la carrucola sia ideale.



Svolgimento

Consideriamo un corpo alla volta e consideriamo le forze a cui è sottoposto e rappresentiamole graficamente.



Forze che agiscono sul corpo 1:

- Forza peso P_1;
- Reazione vincolare del piano inclinato N_1;
- Tensione del filo T_1;
- Forza di attrito che si oppone al moto (nel disegno ho definito un verso arbitrario. In realtà non sappiamo ancora se il copro C_1 salirà o scenderà lungo il piano) A_1;

Forze che agiscono sul corpo 2:

- Forza peso P_2;
- Tensione del filo T_2;

In base alle osservazioni fatte scriviamo le equazioni vettoriali per determinare la risultante di tutte le forze che agiscono su ciascun corpo.

$$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{A_1} \quad Corpo\ C_1$$

$$\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} \quad Corpo\ C_2$$

Ora consideriamo i vincoli del moto: la corda e la carrucola sono ideali, quindi:

$$\overrightarrow{|T_1|} = \overrightarrow{|T_2|} = \overrightarrow{|T|}$$

I pesi dei corpi sono dati da:

$$\overrightarrow{P_1} = m_1\vec{g} \quad corpo\ C_1$$

$$\overrightarrow{P_2} = m_2\vec{g} \quad corpo\ C_2$$

Le forze risultanti sono date da:

$$\overrightarrow{F_1} = m_1\overrightarrow{a_1} \quad corpo\ C_1$$

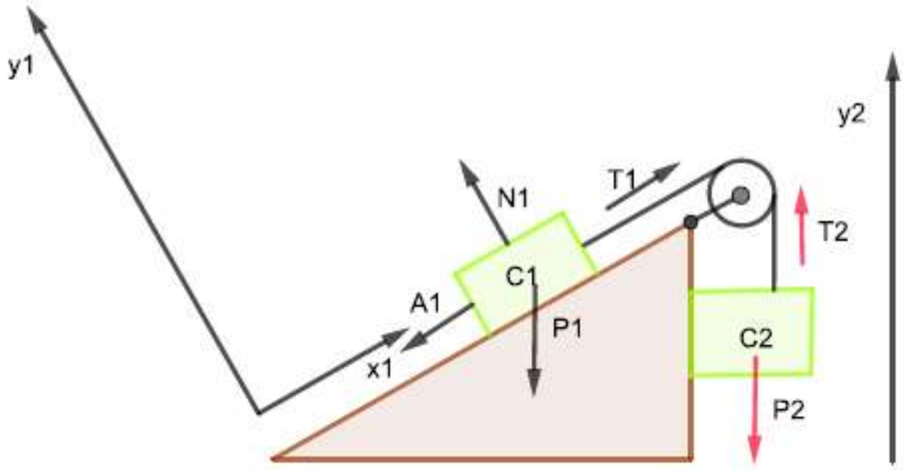
$$\overrightarrow{F_2} = m_2\overrightarrow{a_2} \quad corpo\ C_2$$

Facciamo le sostituzioni:

$$m_1\overrightarrow{a_1} = m_1\vec{g} + \overrightarrow{N_1} + \vec{T} + \overrightarrow{A_1} \qquad Corpo\ C_1$$

$$m_2\overrightarrow{a_2} = m_2\vec{g} + \vec{T} \qquad Corpo\ C_2$$

A questo punto dobbiamo scegliere un sistema di riferimento per scrivere le equazioni considerando le componenti lungo gli assi. Per il moto del corpo C_1 conviene scegliere un sistema di assi cartesiani con l'asse delle ascisse parallelo al piano. Il moto del corpo C2 avviene solo in verticale quindi ci basta il solo asse verticale.



Adesso scriviamo le equazioni usando i sistemi di riferimento scelti, tenendo conto che il piano è inclinato di un angolo α:

$$m_1 a_{1x1} = T - m_1 g sin\alpha + A_x \qquad Asse\ x_1$$

$$m_1 a_{1y1} = N - m_1 g cos\alpha \qquad Asse\ y_1$$

$$m_2 a_{2y2} = T - m_2 g \qquad Asse\ y_2$$

I vincoli sono due:

- piano inclinato: il corpo C_1 non penetra il piano inclinato e non si stacca da esso. Il vincolo del piano inclinato implica che:

$$y_1 = 0 \quad \rightarrow \quad v_{1y1} = \frac{dy_1}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad a_{1y1} = \frac{dv_{1y1}}{dt} = \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0$$

- filo inestensibile: nel moto, i corpi si trovano sempre alla stessa distanza, quindi

$$\Delta x_1 = -\Delta y_2$$

Derivando due volte per trovare le accelerazioni:

$$a_{1x1} = -a_{2y2}$$

Facciamo le sostituzioni considerando che dobbiamo determinare l'accelerazione del corpo C_2:

$$\begin{cases} -m_1 a_{2y2} = T - m_1 g sin\alpha \pm \mu m_1 g cos\alpha \\ N - m_1 g cos\alpha = 0 \\ m_2 a_{2y2} = T - m_2 g \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un sistema di equazioni algebriche. Da notare che abbiamo messo il doppio segno per la forza d'attrito perché non sappiamo ancora quale sarà il verso del moto di C_1. Non è necessario risolverlo. Ci basta determinare l'accelerazione richiesta. Dalla terza equazione si ricava la tensione del filo:

$$T = \left(a_{2y2} + g\right) m_2$$

Sostituendo nella prima equazione:

$$-m_1 a_{2y2} = m_2 a_{2y2} + m_2 g - m_1 g sin\alpha \pm \mu m_1 g cos\alpha$$

Spostando i termini contenenti l'incognita a primo membro e cambiando segno:

$$(m_1 + m_2) a_{2y2} = m_1 g sin\alpha - m_2 g \mp m_1 g cos\alpha$$

Raccogliendo m_1g a fattor comune nel secondo membro e risolvendo:

$$a_{2y2} = \frac{(sin\alpha \mp \mu cos\alpha) m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Per decidere il segno della forza di attrito dobbiamo considerare i due casi possibili.

Primo caso: il corpo C_1 sale, la forza di attrito si oppone al moto quindi, rispetto all'asse delle ascisse scelto, è negativa. Sostituiamo i valori numerici in questo caso.

$$a_{2y2} = \frac{(sin30^\circ - 0.2 cos30^\circ) \cdot 3 \cdot 9.8 - 3 \cdot 9.8}{3 + 3} = \frac{(0.5 - 0.173) \cdot 29.4 - 29.4}{6} = -3.3 m/s^2$$

Consideriamo ora il caso in cui il corpo scende:

$$a_{2y2} = \frac{(sin30^\circ + 0.2 cos30^\circ) \cdot 3 \cdot 9.8 - 3 \cdot 9.8}{3 + 3} = \frac{(0.5 + 0.173) \cdot 29.4 - 29.4}{6} == -1.6 m/s^2$$

In entrambi i casi l'accelerazione risulta negativa quindi il corpo C_2 scende ed il corpo C_1 sale. La forza di attrito si oppone al moto quindi il suo verso è discorde all'asse delle ascisse scelto. Si ricade nel primo caso quindi:

$$a_{2y2} = -3.3 m/s^2$$