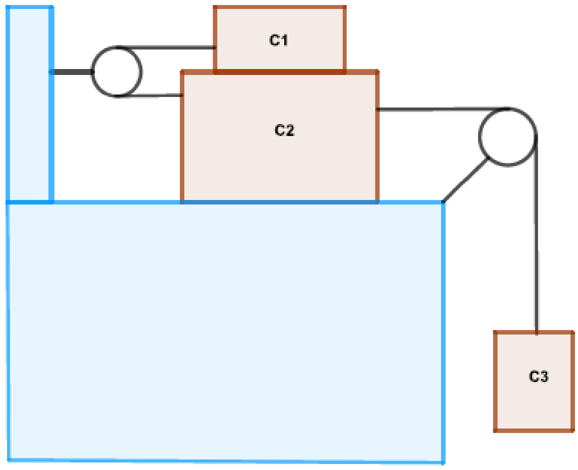
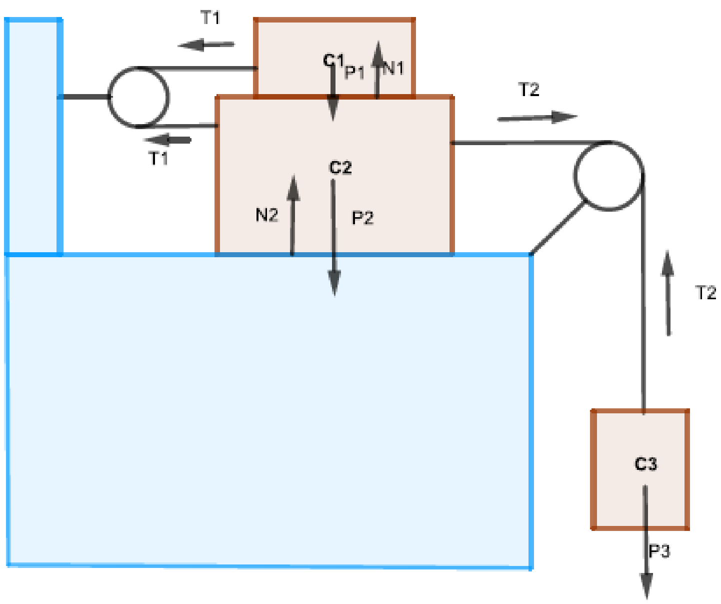
**Esercizio 9**

Tre corpi $C_1$, $C_2$ e $C_3$ sono collegati con fili inestensibili e di peso trascurabile e due carrucole ideali e disposti come in figura. Sapendo che $m_1=m_3=2.0kg$ e $m_2=6.0kg$ calcolare la tensione del filo che collega $C_1$ e $C_2$ durante il moto supponendo che l'attrito sia trascurabile.




**Svolgimento**

Consideriamo un corpo alla volta e consideriamo le forze a cui è sottoposto e rappresentiamole graficamente.




Forze che agiscono sul corpo 1:

- Forza peso $P_1$;
- Reazione vincolare del corpo $C_1$: $N_1$;
- Tensione del filo $T_1$;

Forze che agiscono sul corpo 2:

- Forza peso $P_2$;
- Reazione vincolare del piano d'appoggio: $N_2$;
- Tensione del filo $T_1$;

- Tensione del filo $T_2$;

Forze che agiscono sul corpo 3:

- Forza peso $P_3$;
- Tensione del filo $T_2$;

In base alle osservazioni fatte scriviamo le equazioni vettoriali per determinare la risultante di tutte le forze che agiscono su ciascun corpo.

$$\vec{F_1} = \vec{P_1} + \vec{N_1} + \vec{T_1} \qquad Corpo\ C_1$$

$$\vec{F_2} = \vec{P_2} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{T_1} + \vec{T_2} \qquad Corpo\ C_2$$

$$\vec{F_3} = \vec{P_3} + \vec{T_2} \qquad Corpo\ C_3$$

Abbiamo già tenuto conto che sia le carrucole che i fili sono ideali.

I pesi dei corpi sono dati da:

$$\vec{P_i} = m_i\vec{g} \quad con\ i = 1,2,3$$

Le forze risultanti sono date da:

$$\vec{F_i} = m_i\vec{a_i} \quad con\ i = 1,2,3$$

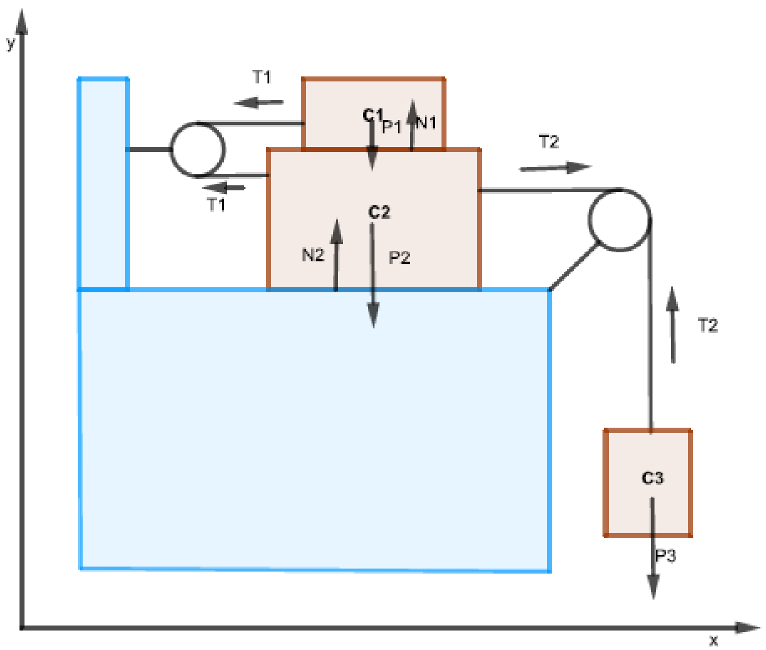
Facciamo le sostituzioni:

$$m_1\vec{a_1} = m_1\vec{g} + \vec{N_1} + \vec{T_1} \qquad Corpo\ C_1$$

$$m_2\vec{a_2} = m_2\vec{g} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{T_1} + \vec{T_2} \qquad Corpo\ C_2$$

$$m_3\vec{a_3} = m_3\vec{g} + \vec{T_2} \qquad Corpo\ C_3$$

A questo punto dobbiamo scegliere un sistema di riferimento per scrivere le equazioni considerando le componenti lungo gli assi. Ci conviene usare lo stesso sistema di riferimento per tutti e tre i corpi: quello indicato in figura.



Adesso scriviamo le equazioni usando i sistemi di riferimento scelti:

$$m_1 a_{1x} = -T_1$$

$$m_1 a_{1y} = N_1 - m_1 g$$

$$m_2 a_{2x} = -T_1 + T_2$$

$$m_2 a_{2y} = N_2 - N_1 - m_2 g$$

Il corpo $C_3$ non si sposta lungo l'asse *x*:

$$m_3 a_{3y} = T_2 - m_3 g$$

I vincoli sono due:

- Piano di appoggio per il corpo $C_2$ e corpo $C_2$ per il corpo $C_1$ entrambi questi corpi si muovono con quota costante quindi:

$$y = cost \quad \rightarrow \quad v = \frac{dy}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Prima di considerare il secondo vincolo riscriviamo le equazioni:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -T_1 \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ m_2 a_{2x} = -T_1 + T_2 \\ N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \\ m_3 a_{3y} = T_2 - m_3 g \end{cases}$$

- filo inestensibile: nel moto, i corpi si trovano sempre alla stessa distanza, quindi

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2 \qquad \Delta y_3 = -\Delta x_2$$

$$\Delta x_1 = \Delta y_3 = -\Delta x_2$$

Derivando due volte per trovare le accelerazioni:

$$a_{1x} = -a_{2x} = a_{3y}$$

Scriviamo le equazioni in funzione di $a_{1x}$:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -T_1 \\ N_1 = m_1 g \\ -m_2 a_{1x} = -T_1 + T_2 \\ N_2 - N_1 = m_2 g \\ m_3 a_{1x} = T_2 - m_3 g \end{cases}$$

Anche se non richiesto possiamo trovare i valori delle reazioni vincolari:

$$N_1 = m_1 g = 2.0 \cdot 9.8 = 19.6N$$

$$N_2 = m_2 g + N_1 = 6.0 \cdot 9.8 + 19.6 = 78.4N$$

Consideriamo adesso le altre tre equazioni:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -T_1 \\ -m_2 a_{1x} = -T_1 + T_2 \\ m_3 a_{1x} = T_2 - m_3 g \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un sistema di equazioni algebriche.

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -T_1 \\ -m_2 a_{1x} = m_1 a_{1x} + T_2 \\ m_3 a_{1x} = T_2 - m_3 g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 a_{1x} = -T_1 \\ T_2 = -(m_1 + m_2) a_{1x} \\ m_3 a_{1x} = -(m_1 + m_2) a_{1x} - m_3 g \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -T_1 \\ T_2 = -(m_1 + m_2) a_{1x} \\ (m_1 + m_2 + m_3) a_{1x} = -m_3 g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 a_{1x} = -T_1 \\ T_2 = -(m_1 + m_2) a_{1x} \\ a_{1x} = -\dfrac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} \end{cases}$$

Possiamo calcolare le accelerazioni:

$$a_{1x} = -\frac{2.0 \cdot 9.8}{2.0 + 2.0 + 6.0} = -1.9 m/s^2$$

Quindi:

$$a_{1x} = -1.9 m/s^2 \quad a_{2x} = 1.9 m/s^2 \quad a_{3y} = -1.9 m/s^2$$

Possiamo trovare le tensioni dei fili:

$$T_1 = -m_1 a_{1x} = -2.0(-1.9) = 3.8N$$

$$T_2 = -(m_1 + m_2) a_{1x} = -(2.0 + 6.0)(-1.9) = 15.2N$$


Matilde Consales