Disposizioni e combinazioni

Devo prepararmi la valigia per partire per le vacanze. È una valigia che ha la serratura a combinazione. Per aprirla devo individuare il numero di tre cifre che avevo impostato e che non ricordo. Quante sono le possibili combinazioni di numeri?
In ogni posizione del lucchetto posso inserire una cifra da 0 a 9. Considero l'insieme delle possibili cifre:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Per aprire il lucchetto devo trovare un numero di tre cifre e, quindi, una terna. Ma allora devo fare il seguente prodotto cartesiano:

$$A \times A \times A = \{(0,0,0), (0,0,1), \dots \dots (9,9,9)\}$$

la prima cifra può essere scelta tra 10 cifre diverse;
la seconda cifra può essere scelta tra 10 cifre diverse;
anche la terza cifra può essere scelta tra 10 cifre diverse quindi in totale avremo:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

terne diverse. Infatti per il principio moltiplicativo:

$$|A \times A \times A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$$

In generale dato un insieme A di *n* elementi il prodotto cartesiano per se stesso un numero *k* di volte è formato dalle *k-ple* (a_1, a_2, …….a_k) dove ogni componente è un elemento di A. Questa costruzione è detta ***disposizione con ripetizione***.

Consideriamo un altro problema:
abbiamo 20 libri e li vogliamo disporre in 4 scaffali cioè raggrupparli 5 a 5 **tenendo conto dell'ordine in cui vengono disposti** (I Promessi sposi al primo posto e la Divina commedia al secondo posto non è la stessa cosa che la Divina commedia al primo posto e i Promessi sposi al secondo). Quanti possibili gruppi posso ottenere?
Rispetto a quello di prima il problema è più complicato. Per prima cosa osserviamo che questa volta dobbiamo costruire un insieme di cinquine e che ciascuna cinquina non deve avere elementi ripetuti (lo stesso libro non può essere preso due volte nello stesso gruppo!). Le cinquine (cioè i gruppi) possono essere costruiti nel seguente modo:
il primo libro può essere scelto tra 20 (il numero totale di libri);
il secondo libro può essere scelto tra i restanti 19;
il terzo libro tra i restanti 18 e così di seguito fino al quinto ed ultimo libro che potrà essere scelto tra i restanti 16. Adesso contiamo:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1.860.480$$

cinquine.
Troviamo ora una formula generale. Indicando con *n* il numero di elementi dell'insieme da cui dobbiamo scegliere (nell'esempio il numero totale di libri) e con *k* il numero di elementi del gruppo (nell'esempio il numero di libri da disporre sullo scaffale), il numero totale di gruppi che posso costruire è dato da:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

In questo modo otteniamo le ***disposizioni senza ripetizione***.
In particolare se *k*=*n* troviamo il numero totale di *n-ple* o, detto in un altro modo, il numero totale di modi per ordinare *n* elementi. Questo numero è *n!* e si definisce ***permutazione di n elementi***.

Vediamo adesso un altro esempio:

in una classe di 25 studenti devo sceglierne 6 per una ricerca. In quanti modi posso scegliere il gruppo?
Che cosa cambia rispetto al problema precedente? Una cosa fondamentale: in questo caso **non tengo conto dell'ordine**.
Come nell'esempio precedente dobbiamo costruire un insieme di sestine ciascuna delle quali non deve avere elementi ripetuti (lo stesso studente non può essere preso due volte nello stesso gruppo!).
Procedendo come prima troviamo il numero totale di sestine:

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 = 127.512.000$$

sestine ordinate.
Ma avevamo detto che l'ordine non ci interessa quindi dobbiamo togliere le sestine che hanno gli stessi studenti presi con ordine diverso. Quante sono? Cioè in quanti modi possiamo ordinare 6 elementi? La risposta è 6! Allora dobbiamo dividere il numero trovato per 6! Quindi avremo:

$$\frac{127.512.000}{6!} = 177.100$$

Troviamo ora una formula generale. Indicando con *n* il numero di elementi dell'insieme da cui dobbiamo scegliere (nell'esempio il numero di studenti della classe) e con *k* il numero di elementi del gruppo (nell'esempio il numero di studenti da inserire nel gruppo per la ricerca), il numero totale di gruppi che posso costruire è dato da:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots\cdots (n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots\cdots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots\cdots 2 \cdot 1}{k!\,(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots\cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

In questo modo otteniamo le ***combinazioni senza ripetizione di grandezza k***.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales