Combinazioni

Esercizio 3

Si consideri un mazzo di 40 carte (10 carte distinte per ciascuno dei quattro semi).

a) Quanti insiemi di 5 carte si possono avere?
b) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 4 assi?
c) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 4 carte di uguale valore?
d) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 2 assi?
e) Quanti insiemi di 5 carte possono avere almeno 2 assi?
f) Quanti insiemi di 5 carte possono avere due coppie di carte di uguale valore, ma distinte fra loro?

Svolgimento

a) Osserviamo che dobbiamo costruire cinquine di elementi distinti (ogni carta viene scelta una sola volta).
Poi osserviamo che l'ordine non è importante: non è specificato l'ordine delle carte
Allora si tratta di *combinazioni*:

$$cinquine\ distinte = C_{16,2} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!\,(40-5)!} = \frac{40!}{5!\,35!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 = 658.008$$

b) Nel mazzo ci sono 4 assi quindi le carte che non sono assi sono 36. Consideriamo tutte le cinquine: quelle contenenti 4 assi hanno 4 elementi fissi ed uno variabile quindi sono 36. Più formalmente:

$$cinquine\ con\ 4\ assi = C_{4,4} \cdot C_{36,1} = \binom{4}{4} \cdot \binom{36}{1} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} \cdot \frac{36!}{1!\,(36-1)!} = \frac{1}{0!} \cdot \frac{36!}{35!} = 36$$ [1]

c) Nel mazzo ci sono 4 assi, 4 due, 4 tre, ecc. In totale ci sono 10 gruppi di carte di uguale valore. Il ragionamento fatto prima per gli assi vale per ogni gruppo di carte di uguale valore. Ad esempio le cinquine con 4 due sono 36. In totale ci saranno $36 \cdot 10 = 360$ cinquine con carte di uguale valore.

d) In questo caso le cinquine sono composte da 2 assi (su 4) e da 3 carte (su 36) che non sono assi quindi:

$$cinquine\ con\ 2\ assi = C_{4,2} \cdot C_{36,3} = \binom{4}{2} \cdot \binom{36}{3} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} \cdot \frac{36!}{3!\,(36-3)!} =$$

$$= \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{36!}{3!\,33!} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{3 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 35 \cdot 34 = 42.840$$

e) Le cinquine con almeno 2 assi sono quelle con 2 assi (appena trovate) più quelle con 3 assi più quelle con 4 assi (trovate al punto b).

$$cinquine\ con\ almeno\ 2\ assi = C_{4,2} \cdot C_{36,3} + C_{4,3} \cdot C_{36,2} + C_{4,4} \cdot C_{36,1} = 42.840 + \binom{4}{3} \cdot \binom{36}{2} + 36 =$$

$$= 42.876 + \frac{4!}{3!\,(4-3)!} \cdot \frac{36!}{2!\,(36-2)!} = 42.876 + \frac{4!}{3!} \cdot \frac{36!}{2!\,34!} = 42.876 + \frac{4 \cdot 36 \cdot 35}{2} = 42.876 + 2.520 = 45.396$$

f) Le cinquine sono composte da:

- 2 carte uguali scelte tra 10 gruppi di carte di uguale valore $C_{10,2}$;
- 2 carte uguali ma diverse da quelle già inserite quindi le scelgo tra 9 gruppi: $C_{9,2}$;
- 1 carta diversa da quelle presenti 40-4-4=32[2].

---

[1] Ricordiamo che 0!=1.
[2] Ad esempio se le prime 2 carte sono 2 assi e le seconde 2 sono 2 re devo escludere 4 assi e 4 re e, quindi 8 carte.

Quindi:

$$cinquine\ 2+2+1 = C_{10,2} \cdot C_{9,2} \cdot 32 = \binom{10}{2} \cdot \binom{9}{2} \cdot 32 =$$

$$= \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \cdot \frac{9!}{2!\,(9-2)!} * 32 = \frac{10!}{2!\,8!} \cdot \frac{9!}{2!\,7!} \cdot 32 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 32 = 45 \cdot 36 \cdot 32 = 51.840$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales