Esercizio 4

Si consideri un mazzo di 40 carte (10 carte distinte per ciascuno dei quattro semi). Alice, Bianca e Carlo estraggono dal mazzo rispettivamente 5, 4 e 3 carte.
a) Quante sono le possibili estrazioni in cui nessuno dei tre ha estratto coppe?
b) Quante sono le possibili estrazioni in cui Alice e Bianca non hanno estratto spade, mentre Carlo ne ha estratte esattamente 2?
c) Quante sono le possibili estrazioni in cui Alice e Bianca non hanno estratto spade, mentre Carlo ne ha estratte almeno 2?
d) Quante sono le possibili estrazioni in cui le carte di Alice e Bianca sono tutte carte di denari?
e) Quante sono le possibili estrazioni in cui Alice ha estratto 2 carte di denari e 2 carte di coppe?

Svolgimento

a) Nel mazzo ci sono 30 carte che non sono coppe. Alice estrae 5 carte. Le possibili estrazioni in cui nessuna carta è di coppe sono $C_{30,5}$.
Nel mazzo sono rimaste 25 carte che non sono coppe. Bianca estrae 4 carte. Le possibili estrazioni in cui nessuna carta è di coppe sono $C_{25,4}$.
Adesso nel mazzo ci sono 21 carte che non sono di coppe quindi Carlo, che estrae 3 carte ha $C_{21,3}$ possibilità che non siano di coppe. In totale:

$$possibili\ estrazioni = C_{30,5} \cdot C_{25,4} \cdot C_{21,3} = \binom{30}{5} \cdot \binom{25}{4} \cdot \binom{21}{3} =$$

$$= \frac{30!}{5!\,(30-5)!} \cdot \frac{25!}{4!\,(25-4)!} \cdot \frac{21!}{3!\,(21-3)!} = \frac{30!}{5!\,25!} \frac{25!}{4!\,21!} \frac{21!}{3!\,18!} =$$

Semplificando:

$$= \frac{30!}{5!\,4!\,3!\,18!} \cong 2.4 \cdot 10^{12}$$

b) Come prima nel mazzo ci sono 30 carte che non sono spade quindi le possibili estrazioni sono $C_{30,5}$ per Alice e $C_{25,4}$ per Bianca.
Per quanto riguarda Carlo, invece, la possibilità di estrarre 2 carte di spade è $C_{10,2}$ (le carte di spade sono 10). La terza carta è estratta tra le restanti 21 (che sono tutte le carte che non sono spade: 30 meno le 9 carte già estratte perché Carlo deve estrarre esattamente 2 carte di spade) quindi $C_{21,1}$. In totale:

$$possibili\ estrazioni = C_{30,5} \cdot C_{25,4} \cdot C_{10,2} \cdot C_{21,1} = \binom{30}{5} \cdot \binom{25}{4} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{21}{1} =$$

$$= \frac{30!}{5!\,(30-5)!} \cdot \frac{25!}{4!\,(25-4)!} \cdot \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \cdot \frac{21!}{20!} = \frac{30!}{5!\,25!} \frac{25!}{4!\,21!} \frac{10!}{2!\,8!} \frac{21!}{20!} =$$

Semplificando:

$$= \frac{30!\,10!}{5!\,4!\,2!\,8!\,20!} \cong 1.7 \cdot 10^{12}$$

c) Come prima nel mazzo ci sono 30 carte che non sono spade quindi le possibili estrazioni sono $C_{30,5}$ per Alice e $C_{25,4}$ per Bianca.
Per quanto riguarda Carlo, invece, la possibilità di estrarre 2 carte di spade è $C_{10,2}$ (le carte di spade sono 10). La terza carta è estratta tra le restanti 29 (cioè 40-11: questa volta le carte di spade estratte da Carlo sono **almeno** 2) quindi $C_{29,1}$. In totale:

$$possibili\ estrazioni = C_{30,5} \cdot C_{25,4} \cdot C_{10,2} \cdot C_{29,1} = \binom{30}{5} \cdot \binom{25}{4} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{29}{1} =$$

$$= \frac{30!}{5!\,(30-5)!} \cdot \frac{25!}{4!\,(25-4)!} \cdot \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \cdot \frac{29!}{28!} = \frac{30!}{5!\,25!} \frac{25!}{4!\,21!} \frac{10!}{2!\,8!} 29 =$$

$$= \frac{30!\,10! \cdot 29}{5!\,4!\,21!\,2!\,8!} \cong 2{,}35 \cdot 10^{12}$$

d) nel mazzo ci sono 10 carte di denari. Alice estrae 5 carte di denari, le possibili cinquine sono $C_{10,5}$. Bianca estrae 4 carte di denari tra le restanti 5 (le altre 5 sono già state estratte da Alice) quindi le possibili quaterne sono $C_{5,4}$. Infine Carlo estrae 3 carte tra le restanti 31: $C_{31,3}$.

$$possibili\ estrazioni = C_{10,5} \cdot C_{5,4} \cdot C_{31,3} = \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{31}{3} =$$

$$= \frac{10!}{5!\,(10-5)!} \cdot \frac{5!}{4!\,(5-4)!} \cdot \frac{31!}{3!\,(31-3)!} = \frac{10!}{5!\,5!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot \frac{31!}{3!\,28!} = 5.663.700$$

e) Alice estrae 2 denari (tra le 10 carte di denari) 2 coppe (tra le 10 carte di coppe) ed una carta tra le restanti 20 (la quinta carta non deve essere né di denari né di coppe) quindi $C_{10,2}$ $C_{10,2}$ $C_{20,1}$.
Bianca estrae 4 carte tra le restanti 25: $C_{25,4}$.
Carlo estrae 3 carte tra le restanti 31: $C_{31,3}$. Si trova:

$$possibili\ estrazioni = C_{10,2} \cdot C_{10,2} \cdot C_{20,1} \cdot C_{25,4} \cdot C_{31,3} = \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{1} \cdot \binom{25}{4} \cdot \binom{31}{3} =$$

$$= \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \cdot \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \cdot \frac{20!}{19!} \cdot \frac{25!}{4!\,(25-4)!} \cdot \frac{31!}{3!\,(31-3)!} =$$

$$= \frac{10!}{2!\,8!} \cdot \frac{10!}{2!\,8!} \cdot 20 \cdot \frac{25!}{4!\,21!} \cdot \frac{31!}{3!\,28!} \cong 2{,}3 \cdot 10^{12}$$

Abbiamo usato le combinazioni perché non ci interessa l'ordine.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales