Esercizio 1:

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y, \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 2ax + y^3\right)$$

a) Determinare il dominio di F, per ogni $a \in R$.
b) Determinare i valori di $a \in R$ per i quali il rotore di F risulta nullo.
c) Verificare che per i valori di a trovati nel punto precedente F è esatto nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in R^2 : x > 0\}$$

e calcolarne una funzione potenziale.

d) Calcolare $\int_{\varphi} F$ dove φ è la circonferenza di centro (0, 0) e raggio 1.

Svolgimento:

a) F è definita nell'insieme $D = \{(x,y) \in R^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$.

b) Il rotore di F è dato da:

$$rot(F) = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Sostituendo i dati si ottiene:

$$rot(F) = \frac{\partial\left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 2ax + y^3\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y\right)}{\partial y} =$$

$$= \frac{-2(x^2+y^2) * 2x * 2y}{(x^2+y^2)^4} + 2a - \left(\frac{-2(x^2+y^2) * 2y * 2x}{(x^2+y^2)^4} + 1\right) =$$

$$= \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} + 2a + \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} - 1 = 2a - 1$$

$$rot(F) = 0 \quad \rightarrow \quad 2a - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

c) Per $a = \frac{1}{2}$ si trova:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} + 1$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} + 1$$

Poiché $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ nell'insieme A F è esatto in tale insieme.

Troviamo una funzione potenziale. La funzione potenziale è una funzione P(x, y) tale che:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = F_x \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial y} = F_y$$

Per $a = \frac{1}{2}$ si ha:

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y, \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x + y^3\right)$$

Trovo una funzione potenziale:

$$\int F_x dx = \int \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y\right) dx = \int \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx + \int y dx =$$

Integro il primo addendo per sostituzione:

$$t = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad dt = 2xdx$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} + yx + k = -\frac{1}{t} + xy + k = -\frac{1}{x^2+y^2} + xy + k$$

Con k costante arbitraria.

$$\int F_y dx = \int \left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x + y^3\right) dy = \int \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} dy + \int x dx + \int y^3 dy =$$

Integro il primo addendo per sostituzione:

$$t = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad dt = 2ydy$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} + xy + \frac{y^4}{4} + k = -\frac{1}{t} + xy + \frac{y^4}{4} + k = -\frac{1}{x^2+y^2} + xy + \frac{y^4}{4} + k$$

Con k costante arbitraria.
Funzione potenziale:

$$P(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2} + xy + \frac{y^4}{4} + k$$

d) L'integrale richiesto è dato da:

$$\int_\varphi F = \int_\varphi rot(F) d\,l = \int\int_{x^2+y^2=1} (2a-1)\, dxdy$$

Ricordo che la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è rappresentata dall'espressione:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Uso le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{vmatrix} = \rho cos^2\theta + \rho sin^2\theta = \rho$$

Estremi di integrazione:

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int\int_{x^2+y^2=1} (2a-1)\, dxdy = (2a-1)\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta =$$

$$= (2a-1)\int_0^1 \rho\theta \Big|_0^{2\pi} d\rho = (2a-1)\int_0^1 2\pi\rho d\rho = 2\pi(2a-1)\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi(2a-1)\frac{1}{2} = (2a-1)\pi$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales