Esercizio 2:

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + 3by + x^2, \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x\right)$$

a) Determinare il dominio di F, per ogni $b \in R$.
b) Determinare i valori di $b \in R$ per i quali il rotore di F risulta nullo.
c) Verificare che per i valori di b trovati nel punto precedente F è esatto nell'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$ e calcolarne una funzione potenziale.
d) Per i valori di b trovati nei punti precedenti calcolare $\int_\varphi F$, dove φ è la curva parametrizzata da $\varphi(t) = (-t^3, t^4+1), t \in [0,1]$.

Svolgimento:

a) F è definita nell'insieme $D = \{(x,y) \in R^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$.

b) Il rotore di F è dato da:

$$rot(F) = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Sostituendo i dati si ottiene:

$$rot(F) = \frac{\partial\left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + 3by + x^2\right)}{\partial y} =$$

$$= \frac{-2(x^2+y^2)2x * 2y}{(x^2+y^2)^4} + 1 - \left[\frac{-2(x^2+y^2)2y * 2x}{(x^2+y^2)^4} + 3b\right] =$$

$$= \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} + 1 + \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} - 3b = 1 - 3b$$

$$rot(F) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 3b = 0 \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{3}$$

c) Per $b = \frac{1}{3}$ si trova:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} + 1$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} + 1$$

Poiché $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ nell'insieme A F è esatto in tale insieme.
Troviamo una funzione potenziale. La funzione potenziale è una funzione P(x, y) tale che:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = F_x \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial y} = F_y$$

Per $b = \frac{1}{3}$ si ha:

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y + x^2, \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x\right)$$

Trovo una funzione potenziale:

$$\int F_x dx = \int \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + y + x^2\right) dx = \int \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx + \int y dx + \int x^2 dx =$$

Integro il primo addendo per sostituzione:

$$t = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad dt = 2xdx$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} + yx + \frac{x^3}{3} + k = -\frac{1}{t} + xy + \frac{x^3}{3} + k = -\frac{1}{x^2+y^2} + xy + \frac{x^3}{3} + k$$

Con k costante arbitraria.

$$\int F_y dy = \int \left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x\right) dy = \int \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} dy + \int x dy =$$

Integro il primo addendo per sostituzione:

$$t = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad dt = 2ydy$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} + xy + k = -\frac{1}{t} + xy + k = -\frac{1}{x^2+y^2} + xy + k$$

Con k costante arbitraria.
Funzione potenziale:

$$P(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2} + xy + \frac{x^3}{3} + k$$

d) Per $b = \frac{1}{3}$ il campo F è irrotazionale. Nel dominio D, pur essendo irrotazionale, non è conservativo perché D non è semplicemente connesso.
Se, però, considero l'insieme A il campo F risulta conservativo perché A è semplicemente connesso.
Nell'insieme A esiste, quindi, la funzione potenziale e l'integrale cercato non dipende dal percorso e vale:

$$\int_\varphi F = P\big(\varphi(1)\big) - P\big(\varphi(0)\big)$$

Dove:

$$\varphi(0) = (0,1) \quad e \quad \varphi(1) = (-1,2)$$

Sostituendo si ottiene:

$$\int_\varphi F = P(-1,2) - P(0,1) = -\frac{1}{(-1)^2+2^2} + (-1)*2 + \frac{(-1)^3}{3} - \left(-\frac{1}{0^2+1^2} + 0*1 + \frac{0^3}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{-3-30-5+15}{15} = -\frac{23}{15}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales