

Esercizio 14

Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{\frac{9-x}{x+1}} > x-3$$

Svolgimento

Dobbiamo, innanzi tutto, vedere per quali valori la disequazione è definita. Ricordiamo che la frazione sotto radice deve essere positiva. Quindi:

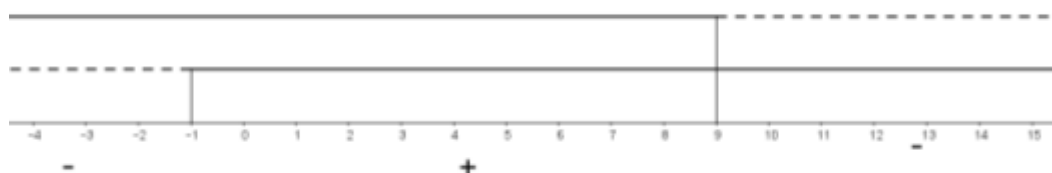
$$\frac{9-x}{x+1} \geq 0$$

Risolviamo questa disequazione. Deve $x \neq -1$

$$9-x \geq 0 \rightarrow x \leq 9$$

$$x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

Facciamo il grafico:



La disequazione data è definita per:

$$-1 < x \leq 9$$

Adesso possiamo risolvere la disequazione:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{9-x}{x+1}} > x-3 \\ -1 < x \leq 9 \end{cases}$$

Eleviamo ambo i membri della prima disequazione al quadrato

$$\begin{cases} \frac{9-x}{x+1} > (x-3)^2 \\ -1 < x \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{9-x}{x+1} > (x-3)^2 \\ -1 < x \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{9-x}{x+1} > x^2 - 6x + 9 \\ -1 < x \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9-x > (1+x)(x^2 - 6x + 9) \\ -1 < x \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9-x > x^2 - 6x + 9 + x^3 - 6x^2 + 9x \\ -1 < x \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x > x^3 - 5x^2 + 3x \\ -1 < x \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 4x < 0 \\ -1 < x \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x^2 - 5x + 4) < 0 \\ -1 < x \leq 9 \end{cases} \quad (1)$$

Consideriamo la prima disequazione e vediamo quando:

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

Procediamo trovando le soluzioni dell'equazione di secondo grado:

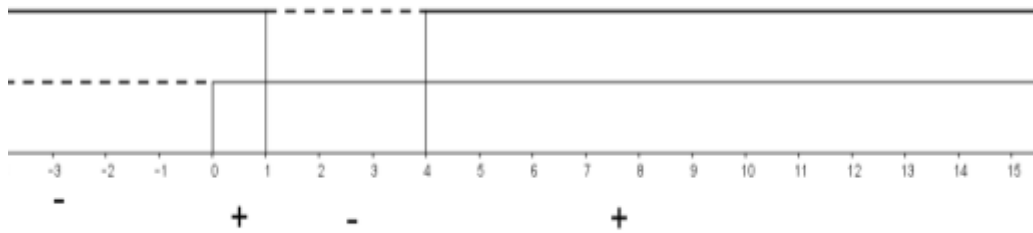
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad x_1 = 4; \quad x_2 = 1$$

Quindi:

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \text{ per } x < 1 \text{ e } x > 4$$

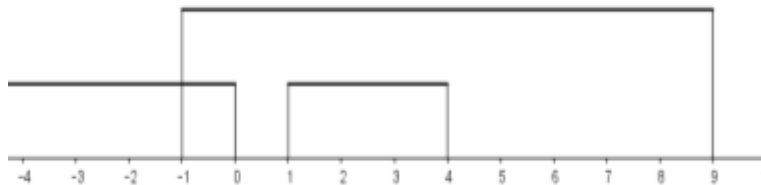
Possiamo risolvere la prima disequazione. Facciamo il grafico:



Riguardando la (1) troviamo:

$$\begin{cases} x < 0 & 1 < x < 4 \\ -1 < x \leq 9 \end{cases}$$

Facciamo un altro grafico per trovare le soluzioni che sono date dall'intersezione di questi intervalli:



Dal grafico si ricava che la soluzione della disequazione data è:

$$-1 < x < 0 \cup 1 < x < 4$$

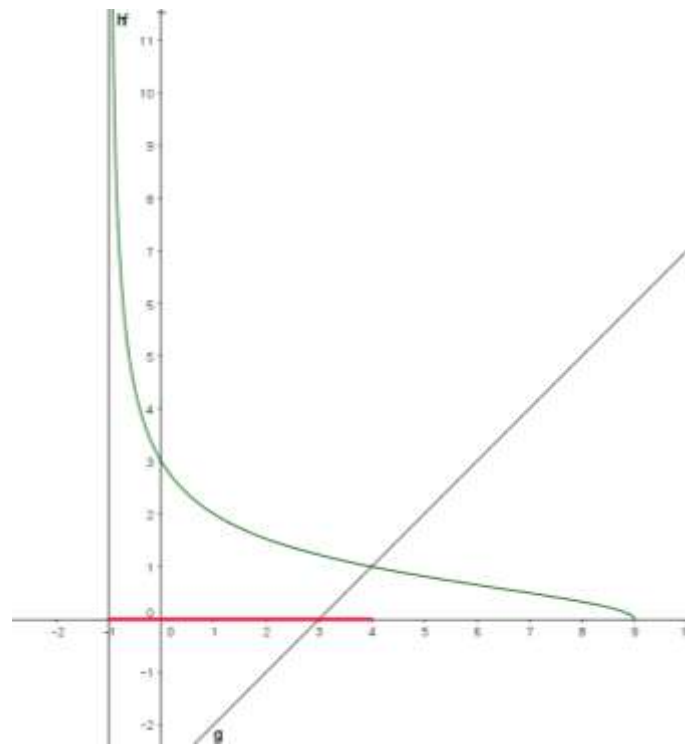
Osserviamo che per ricavare queste soluzioni abbiamo elevato al quadrato ambo i membri della disequazione data e, quindi, in realtà, abbiamo trovato le soluzioni di un'altra disequazione. Dobbiamo controllare.

- L'intervallo $x < -1$ non è una soluzione perché qui il primo membro non è definito;
- L'intervallo $0 < x < 1$ fa parte delle soluzioni infatti per questi valori di x il primo membro è positivo ed il secondo membro è negativo quindi la disequazione è verificata;
- Nell'intervallo $4 < x < 9$ il secondo membro diventa maggiore del primo e la disequazione non è verificata.

Le soluzioni della disequazione data sono:

$$-1 < x < 4$$

Verifichiamo graficamente disegnando le funzioni con Geogebra:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales