Esercizio 17

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{|x-1|}{3|x|+3}-\frac{3}{|x|+1}\geq 0$$

Svolgimento

Osserviamo che possiamo raccogliere il 3 dal denominatore della frazione a primo membro:

$$\frac{|x-1|}{3(|x|+1)}-\frac{3}{|x|+1}\geq 0$$

Non si capisce ancora bene com'è il campo di esistenza. Analizziamo il fattore $|x|+1$ presente ai denominatori:

$$|x|+1=x+1\quad se\ x>0 \qquad |x|+1=-x+1\ se\ x<0$$

Alla luce di queste considerazioni possiamo affermare che deve essere:

$$x\neq \pm 1$$

Consideriamo adesso l'altro fattore presente in valore assoluto:

$$x-1>0\ se\ x>1$$

Quindi:

$$|x-1|=x-1\ \ se\ x>1 \quad |x-1|=-x+1\ \ se\ x<1$$

Possiamo scrivere l'espressione della disequazione data nei vari intervalli:

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{3(1-x)}-\dfrac{3}{1-x}\geq 0 & se\quad x<0\\[2ex] \dfrac{1-x}{3(x+1)}-\dfrac{3}{x+1}\geq 0 & se\quad 0<x<1\\[2ex] \dfrac{x-1}{3(x+1)}-\dfrac{3}{x+1}\geq 0 & se\quad x>1\end{cases}$$

Non ci resta che risolvere la disequazione nei tre intervalli. Consideriamo il primo:

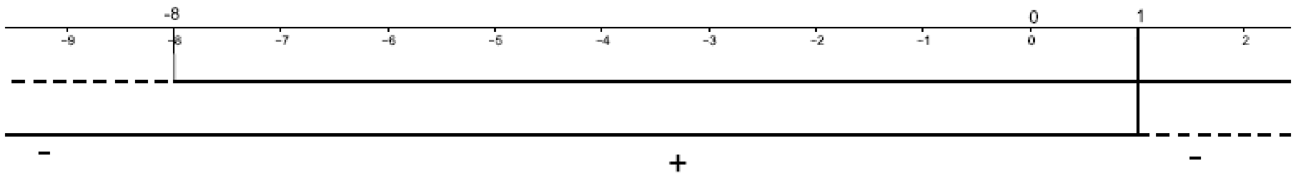
$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{3(1-x)}-\dfrac{3}{1-x}\geq 0\\[2ex] x<0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{1-x-9}{3(1-x)}\geq 0\\[2ex] x<0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{-x-8}{1-x}\geq 0\\[2ex] x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x+8}{1-x}\leq 0\\[2ex] x<0\end{cases}$$

Studiamo il segno della prima disequazione:

$$x+8\geq 0\quad\rightarrow\quad x\geq -8 \qquad 1-x>0\quad\rightarrow\quad x<1$$

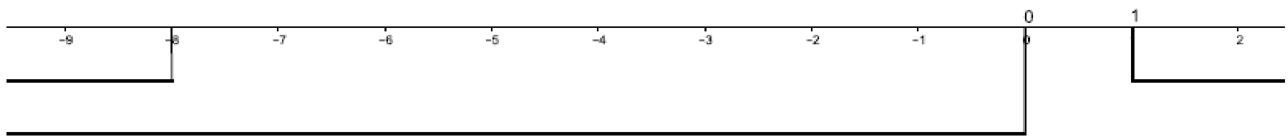
Facciamo un grafico per trovare le soluzioni:



Dal grafico deduciamo che la disequazione ha come soluzioni:

$$x \leq -8 \vee x > 1$$

Facciamo un altro grafico per trovare le soluzioni del sistema:



Dal grafico vediamo che le soluzioni, date dall'intersezione dei due intervalli, sino date da:

$$x \leq -8$$

Consideriamo il secondo intervallo:

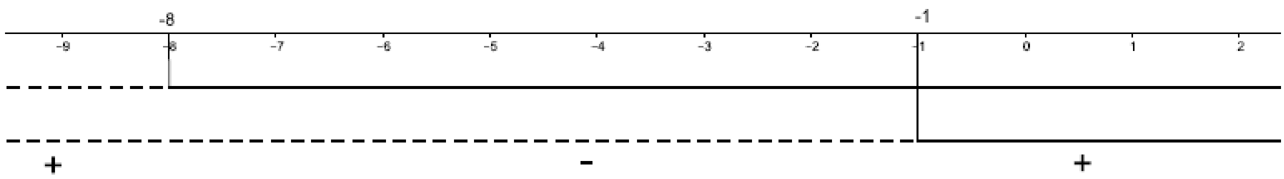
$$\begin{cases} \frac{1-x}{3(x+1)} - \frac{3}{x+1} \geq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1-x-9}{3(x+1)} \geq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-x-8}{3(x+1)} \geq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x+1} \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Studiamo il segno della prima disequazione:

$$x + 8 \geq 0 \rightarrow x \geq -8 \qquad x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$$

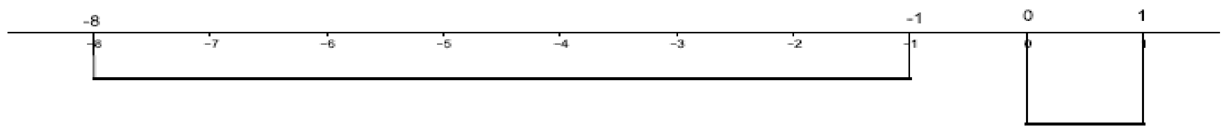
Facciamo un grafico per trovare le soluzioni:



Dal grafico deduciamo che la disequazione ha come soluzioni:

$$-8 \leq x < -1$$

Facciamo un altro grafico per trovare le soluzioni del sistema:



Il sistema non ha soluzioni.

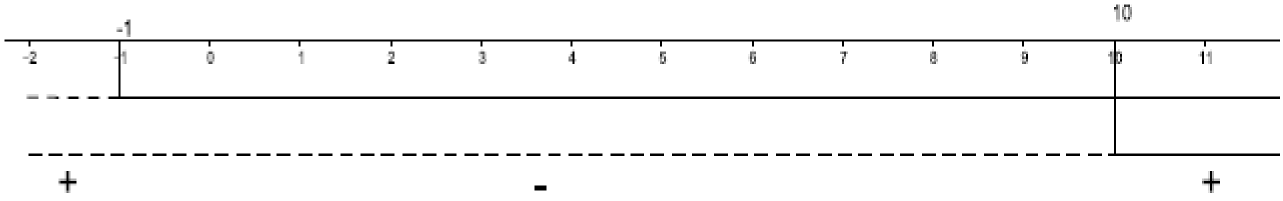
Consideriamo il terzo intervallo:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3(x+1)} - \dfrac{3}{x+1} \geq 0 \\ \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1-9}{3(x+1)} \geq 0 \\ \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-10}{3(x+1)} \geq 0 \\ \\ x > 1 \end{cases}$$

Studiamo il segno della prima disequazione:

$$x - 10 \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; x \geq 10 \qquad x + 1 > 0 \;\; \rightarrow \;\; x > -1$$

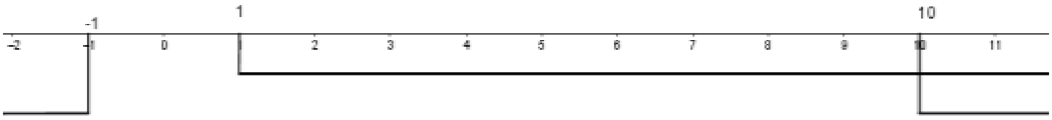
Facciamo un grafico per trovare le soluzioni:



Dal grafico deduciamo che la disequazione ha come soluzioni:

$$x < -1 \;\; \vee \;\; x \geq 10$$

Facciamo un altro grafico per trovare le soluzioni del sistema:



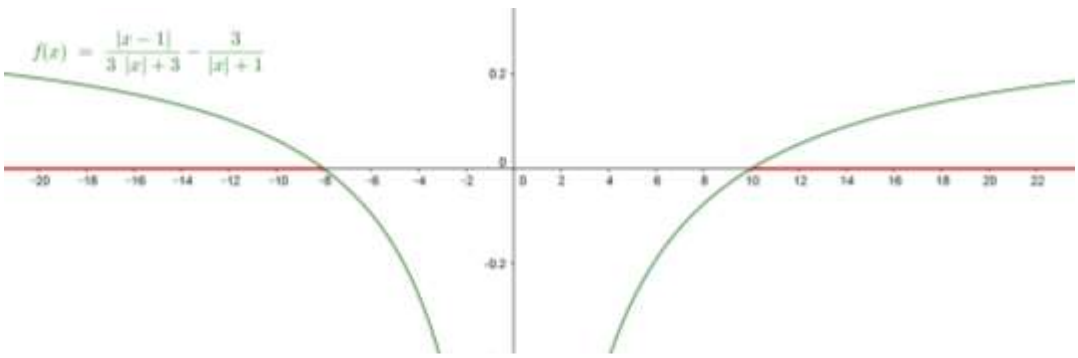
Dal grafico vediamo che le soluzioni, date dall'intersezione dei due intervalli, sino date da:

$$x \geq 10$$

Le soluzioni della disequazione sono date dall'unione delle soluzioni trovate quindi:

$$x \leq -8 \vee \;\; x \geq 10$$

Facciamo un grafico per verificare il risultato:



Gli intervalli in cui l'espressione data risulta positiva sono tracciati in rosso. La soluzione è corretta.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales