

Disequazioni frazionarie

Esercizio 3

Risolvi la disequazione:

$$\frac{1}{x+1} \left(\frac{6}{x-1} + 3 \right) < 1 + \frac{2}{x-1}$$

Deve essere $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

Portiamo tutto al primo membro:

$$\frac{1}{x+1} \left(\frac{6}{x-1} + 3 \right) - 1 - \frac{2}{x-1} < 0$$

$$\frac{6}{(x+1)(x-1)} + \frac{3}{x+1} - 1 - \frac{2}{x-1} < 0$$

$$\frac{6 + 3(x-1) - (x+1)(x-1) - 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{6 + 3x - 3 - x^2 + 1 - 2x - 2}{(x+1)(x-1)} < 0 \quad \frac{-x^2 + x + 2}{(x+1)(x-1)} < 0$$

Cambiamo segno alla frazione e, di conseguenza, verso della disequazione:

$$\frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(x-1)} > 0$$

Risolvi l'equazione:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

Possiamo scrivere:

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} > 0$$

Consideriamo prima il numeratore e vediamo per quali valori di x risulta positivo:

1. $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$

2. $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

Facciamo lo schema:

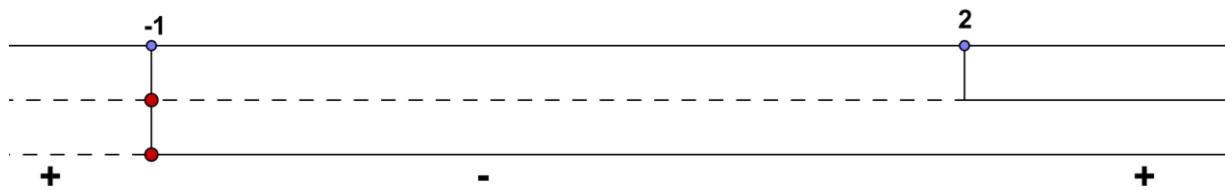


Figura 1 Il segno del numeratore.

Il numeratore è positivo per $x < -1$, $x > 2$

Procediamo allo stesso modo per il denominatore:

$$1. x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$2. x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

Facciamo lo schema:

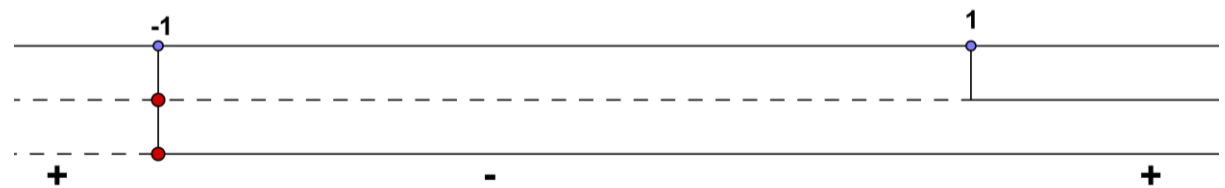


Figura 2 Il segno del denominatore.

Il denominatore è positivo per $x < -1$, $x > 1$

Adesso mettiamo insieme le soluzioni trovate e facciamo un altro schema:

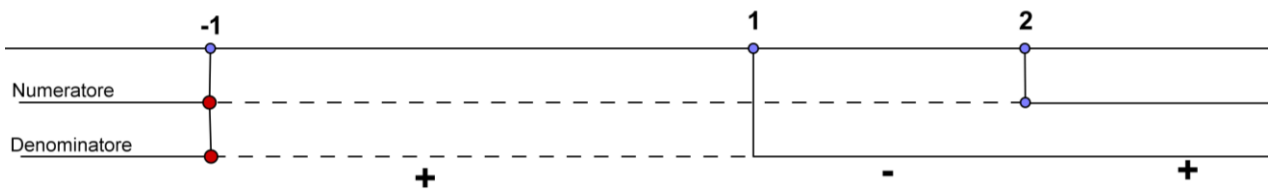


Figura 3 Il segno della frazione.

Soluzione:

$$x < -1 \quad x > 2 \quad x \neq -1.$$

Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato semplificando.