Esercizio20

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} |x| > \dfrac{1}{|x-1|} \\ \\ \dfrac{1}{|x-1|} > \dfrac{1}{|x+2|} \end{cases}$$

Svolgimento

Determiniamo il Campo di esistenza:

$$x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 1$$

$$x + 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -2$$

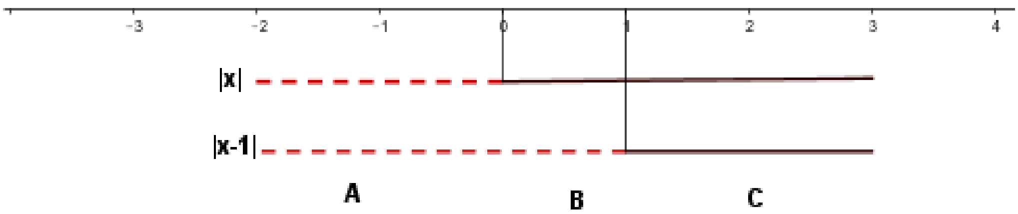
Risolviamo una disequazione alla volta. La prima presenta due fattori con valore assoluto:

$$|x| = x \; sex > 0 \qquad |x| = -x \; se \; x < 0$$

$$|x-1| = x - 1 \;\; se \; x - 1 > 0 \;\; \rightarrow \;\; x > 1$$

$$|x-1| = 1 - x \; se \; x - 1 < 0 \;\; \rightarrow \;\; x < 1$$

Facciamo il grafico:



Dal grafico deduciamo che dobbiamo risolvere 3 sistemi:

$$A \begin{cases} -x > \dfrac{1}{1-x} \\ \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x(1-x)-1}{1-x} > 0 \\ \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x+x^2-1}{1-x} > 0 \\ \\ x < 0 \end{cases}$$

Risolviamo:

$$x^2 - x - 1 > 0 \quad (1)$$

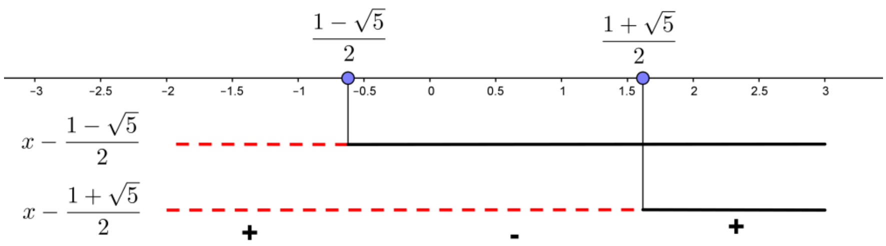
Equazione associata:

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Possiamo scrivere:

$$\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$$

Facciamo il grafico:



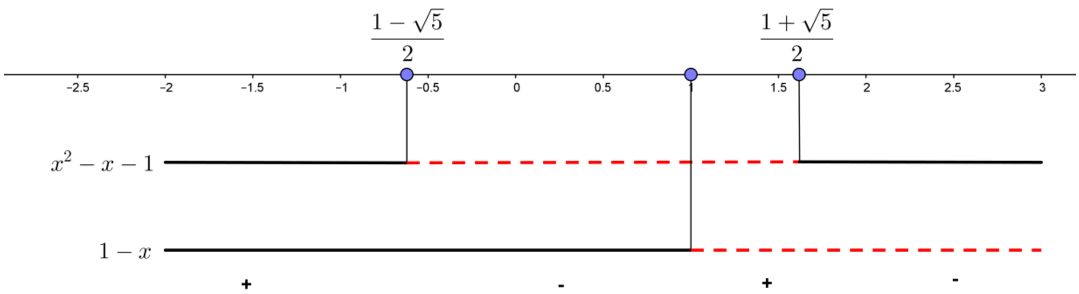
Dal grafico deduciamo che la condizione (1) è verificata se:

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad o \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per quanto riguarda il denominatore:

$$1 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 1$$

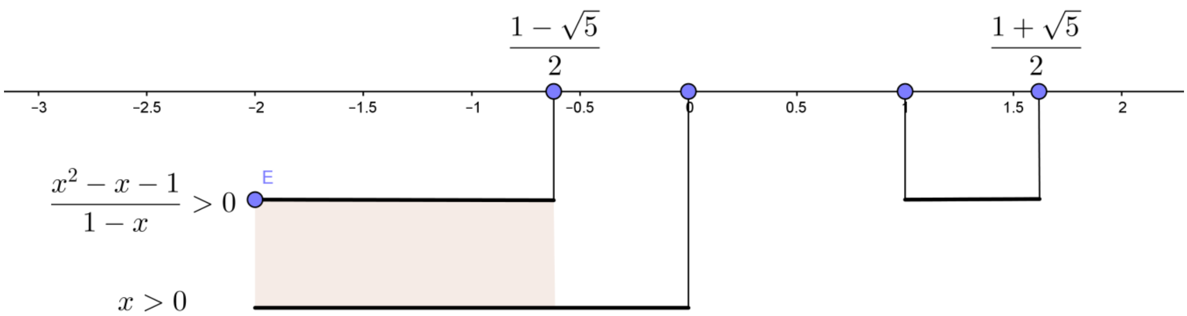
Facciamo il grafico:



La disequazione è verificata se:

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad o \quad 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per determinare la soluzione del sistema troviamo l'intersezione degli insiemi che costituiscono la soluzione delle due disequazioni:



Quindi la soluzione del sistema A è la seguente:

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Sistema B

$$B\begin{cases} x > \dfrac{1}{1-x} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x(1-x)-1}{1-x} > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x^2-1}{1-x} > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{x-1} > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Nell'ultimo passaggio ho cambiato segno sia al numeratore che al denominatore quindi il verso della disequazione resta lo stesso. Risolviamo:

$$x^2 - x + 1 > 0$$

Equazione associata:

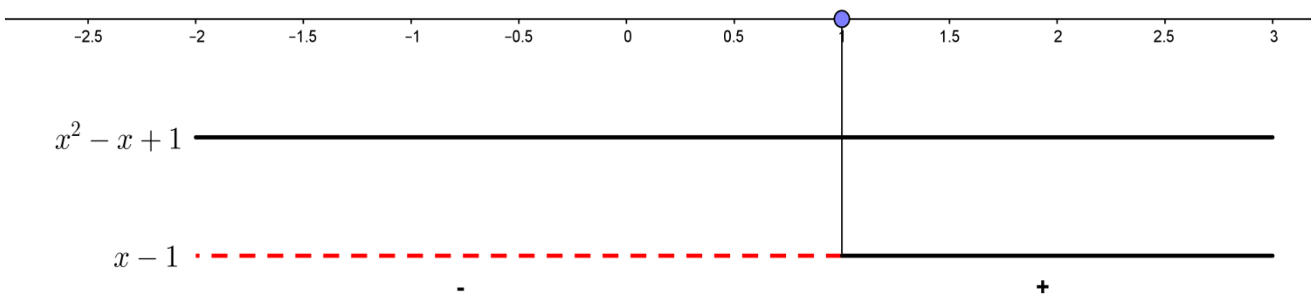
$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Il discriminante è negativo. Il trinomio è sempre positivo e non si annulla mai.

Per quanto riguarda il denominatore:

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$

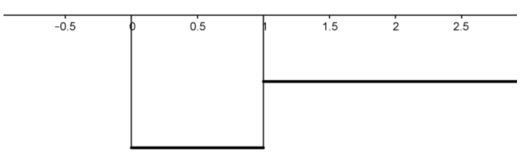
Facciamo il grafico:



Dal grafico deduciamo che la prima disequazione è verificata per:

$$x > 1$$

Per determinare la soluzione del sistema troviamo l'intersezione degli insiemi che costituiscono la soluzione delle due disequazioni



Dal grafico vediamo che l'intersezione dei due insiemi è l'insieme vuoto quindi non ci sono soluzioni[1].

Sistema C

$$C\begin{cases} x > \dfrac{1}{x-1} \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)-1}{x-1} > 0 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-x-1}{x-1} > 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

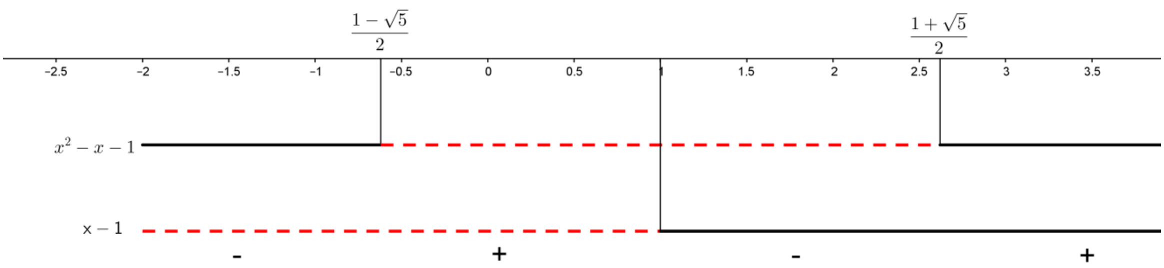
Abbiamo già risolto la disequazione a numeratore della prima disequazione nel caso A. Riportiamo per comodità il risultato:

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad o \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per quanto riguarda il denominatore:

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$

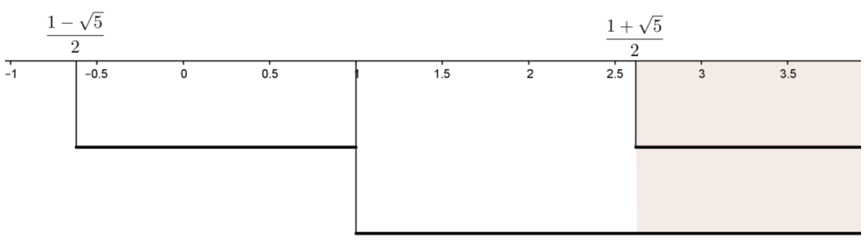
Facciamo il grafico:



Dal grafico deduciamo che la prima disequazione è verificata per:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \quad o \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per determinare la soluzione del sistema troviamo l'intersezione degli insiemi che costituiscono la soluzione delle due disequazioni

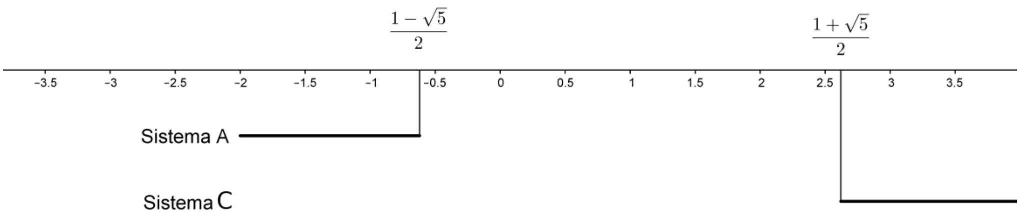


Quindi la soluzione del sistema C è la seguente:

$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La soluzione della prima equazione è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei sistemi A, B e C:

[1] L'intersezione non è il valore 1. Infatti le disequazioni non presentano il segno di uguaglianza.



$$\boldsymbol{x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ o \ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Facciamo la stessa cosa per la seconda disequazione che presenta due fattori con valore assoluto:

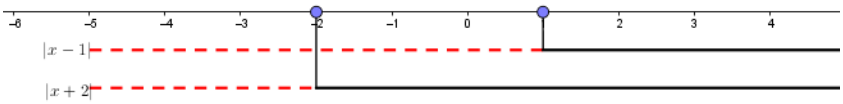
$$|x-1| = x-1 \ \ se\, x-1>0 \ \ \rightarrow \ \ x>1$$

$$|x-1| = 1-x \, se\, x-1<0 \ \ \rightarrow \ \ x<1$$

$$|x+2| = x+2 \ \ se\, x+2>0 \ \ \rightarrow \ \ x>-2$$

$$|x+2| = -x-2 \, se\, x+2<0 \ \ \rightarrow \ \ x<-2$$

Facciamo il grafico:

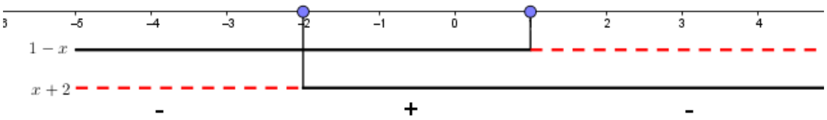


Dal grafico deduciamo che dobbiamo risolvere 3 sistemi:

$$D\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} > \dfrac{1}{-x-2} \\ x<-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x-2-1+x}{(1-x)(-x-2)} > 0 \\ x<-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{(1-x)(-x-2)} > 0 \\ x<-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{(1-x)(x+2)} > 0 \\ x<-2 \end{cases}$$

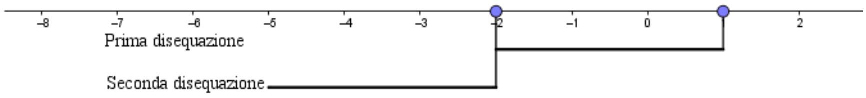
Il numeratore è sempre positivo. Risolviamo graficamente:



La prima disequazione è verificata per:

$$-2 < x < 1$$

Facciamo il grafico per risolvere il sistema D:

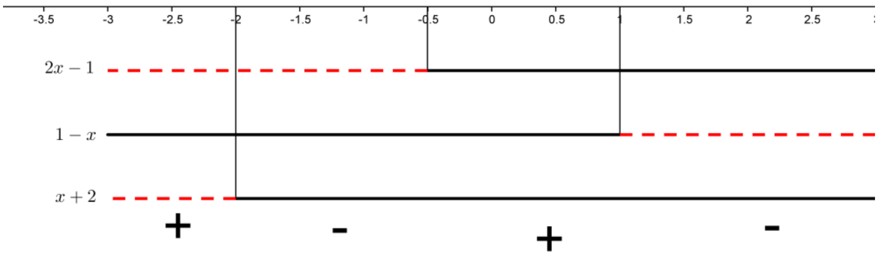


Dal grafico vediamo che non ci sono soluzioni.

Consideriamo il sistema E:

$$E\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} > \dfrac{1}{x+2} \\ -2 < x < 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{x+2-1+x}{(1-x)(x+2)} > 0 \\ -2 < x < 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{2x+1}{(1-x)(x+2)} > 0 \\ -2 < x < 1\end{cases}$$

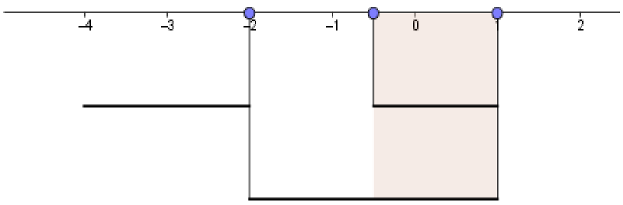
La prima disequazione presenta tre fattori. Facciamo il grafico:



Soluzione:

$$x < -2 \quad o \quad -\frac{1}{2} < x < 1$$

Risolviamo graficamente il sistema:

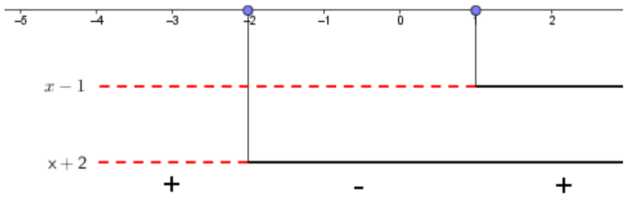


$$-\frac{1}{2} < x < 1$$

Consideriamo il sistema F:

$$F\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{x+2} \\ x > 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{x+2-x+1}{(x-1)(x+2)} > 0 \\ x > 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{(x-1)(x+2)} > 0 \\ x > 1\end{cases}$$

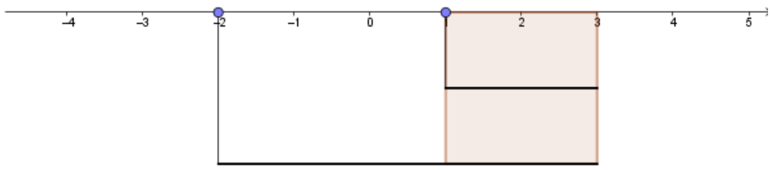
Facciamo il grafico per risolvere la prima disequazione:



Soluzione:

$$x < -2 \ \ o \ \ x > 1$$

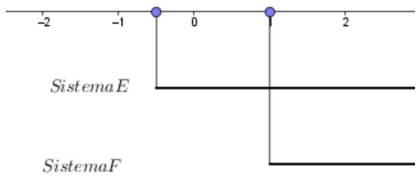
Risolviamo graficamente il sistema F:



Soluzione del sistema F:

$$x > 1$$

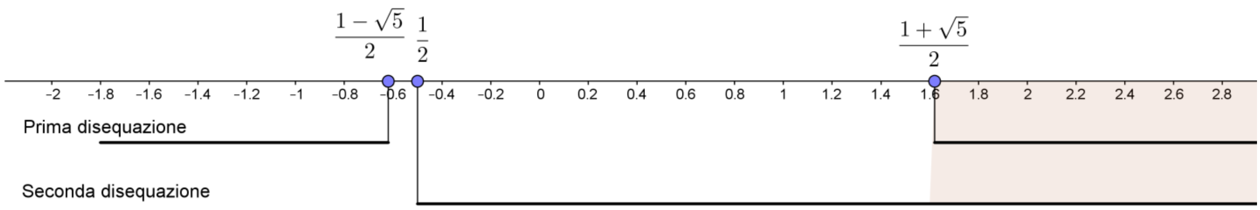
La soluzione della seconda disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi D E ed F. Facciamo il grafico:



Soluzione della seconda disequazione:

$$\boldsymbol{x > -\frac{1}{2}}$$

L'intersezione degli insiemi di soluzioni delle due disequazioni costituisce la soluzione del sistema dato. Facciamo l'ultimo grafico:



Soluzione:

$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Matilde Consales