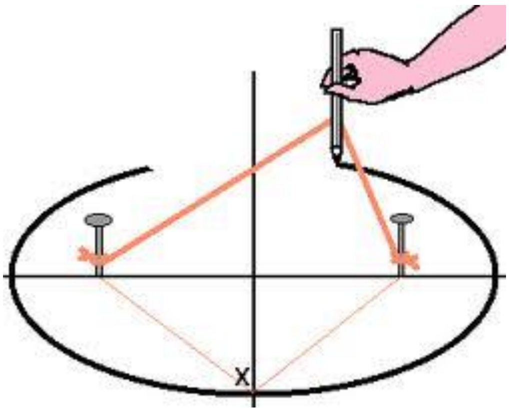
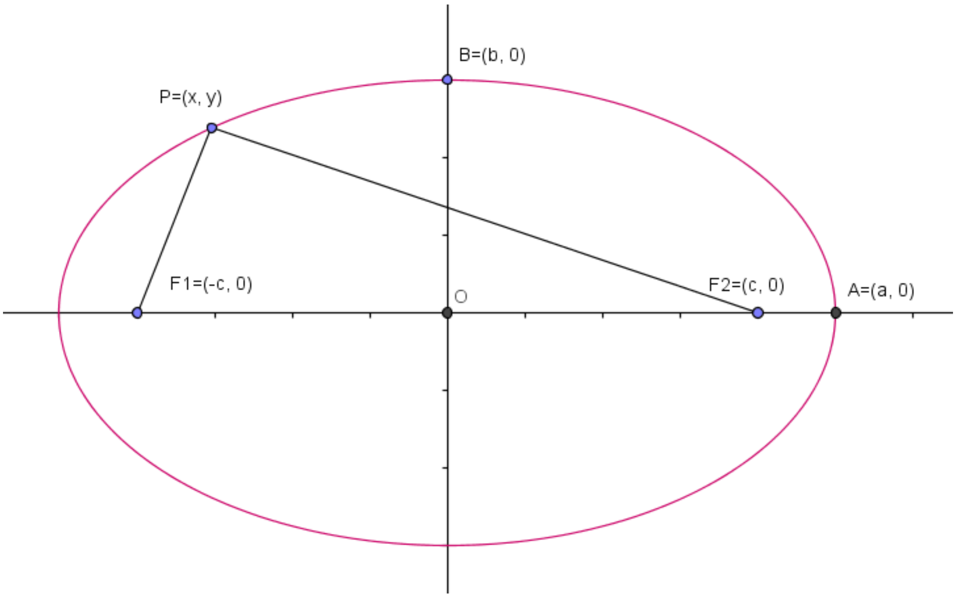
Ellisse

L'ellisse è il luogo dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti **fuochi** rimane costante.
E' anche la figura piana che si ottiene tagliando un cono con un piano inclinato rispetto alla base del cono.
Si può disegnare facilmente piantando due chiodi su una tavola di compensato. Si prende un pezzo di spago, lo si fissa ai due chiodini e con un pennarello si disegna l'ellisse: basta tenere sempre lo spago teso. Vedi figura:



I due chiodini sono i fuochi dell'ellisse.

Troviamo adesso l'equazione di un'ellisse a partire dalla definizione. Per semplificare i calcoli consideriamo un'ellisse con i due fuochi sull'asse delle ascisse. (Ci si può sempre ricondurre a questo caso con una traslazione ed una rotazione degli assi cartesiani).
Consideriamo l'ellisse di figura.



Si vedono i fuochi F_1=(-c, 0) e F_2=(c, 0); e i semiassi maggiore OA e minore OB. Dato un punto generico P=(x, y) appartenente all'ellisse scriviamo la somma delle distanze dai due fuochi:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Per definizione questa somma è la stessa per ogni punto appartenente all'ellisse e quindi se consideriamo il punto A=(a, 0) troviamo:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = a + c + a - c = 2a$$

Ma allora possiamo scrivere:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Spostiamo il secondo radicale a secondo membro:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Semplifichiamo:

$$4cx + 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividiamo ambo i membri per 4:

$$-cx + a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Eleviamo nuovamente al quadrato:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

Semplifichiamo e portiamo a primo membro i termini con x e y:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Moltiplichiamo ambo i membri per -1 e raccogliamo i fattori comuni:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (1)$$

Consideriamo adesso il punto B=(b, 0). Poiché appartiene all'ellissi la somma delle distanze dai due fuochi è sempre la stessa e vale 2a. Possiamo, allora, scrivere:

$$\sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2} = 2a \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{c^2 + b^2} = 2a \quad \rightarrow \quad \sqrt{c^2 + b^2} = a$$

Elevando ambo i membri al quadrato:

$$c^2 + b^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 \qquad (2)$$

Sostituendo nell'equazione (1):

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 si trova l'equazione dell'ellisse in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dall'equazione (2) si ricava il valore delle ascisse dei fuochi in funzione della lunghezza dei semiassi:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$