

Esercizio 3

Trovare l'equazione dell'ellisse passante per i punti $P \equiv (2, 7)$ e $Q = (3, 1)$.

Svolgimento

Scrivo l'equazione di un'ellisse generica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Impongo il passaggio per i punti dati:

$$\begin{cases} \frac{2^2}{a^2} + \frac{7^2}{b^2} = 1 & \text{passaggio per } P \\ \frac{3^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1 & \text{passaggio per } Q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{49}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4b^2 + 49a^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \\ \frac{9b^2 + a^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 49a^2 + 4b^2 = a^2b^2 \\ a^2 + 9b^2 = a^2b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = a^2b^2 - 9b^2 \\ 49(a^2b^2 - 9b^2) + 4b^2 - a^2b^2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a^2 = a^2b^2 - 9b^2 \\ 49a^2b^2 - 441b^2 + 4b^2 - a^2b^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = a^2b^2 - 9b^2 \\ 48a^2b^2 - 437b^2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b^2(48a^2 - 437) = 0 \\ a^2 = a^2b^2 - 9b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Questa soluzione non è accettabile.

$$\begin{cases} 48a^2 - 437 = 0 \\ a^2 = a^2b^2 - 9b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 48a^2 = 437 \\ a^2 = a^2b^2 - 9b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{437}{48} \\ \frac{437}{48} = \frac{437}{48}b^2 - 9b^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a^2 = \frac{437}{48} \\ \frac{437b^2 - 432b^2}{48} = \frac{437}{48} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{437}{48} \\ 5b^2 = 437 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{437}{48} \\ b^2 = \frac{437}{5} \end{cases}$$

Equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{\frac{437}{48}} + \frac{y^2}{\frac{437}{5}} = 1$$

Si può anche scrivere:

$$x^2 \frac{48}{437} + y^2 \frac{5}{437} = 1 \rightarrow 48x^2 + 5y^2 = 437$$

