Esercizio 4

Scrivere l'equazione in forma canonica dell'ellisse che ha uno dei due fuochi nel punto $F \equiv (1,0)$ e passa per il punto $P \equiv \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Svolgimento

L'equazione di una generica ellisse in forma canonica è data da:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Imposto il sistema per trovare a e b imponendo le condizioni richieste:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \quad passaggio\ per\ P \\ 1 = a^2 - b^2\ fuoco \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\frac{2}{4}}{b^2} = 1 \\ a^2 = 1 + b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{2b^2} = 1 \\ a^2 = 1 + b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2b^2 + 1 + b^2}{2b^2(1+b^2)} = \dfrac{2b^2(1+b^2)}{2b^2(1+b^2)} \\ a^2 = 1 + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b^2 + 1 = 2b^2 + 2b^4 \\ a^2 = 1 + b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2b^4 - b^2 - 1 = 0 \\ a^2 = 1 + b^2 \end{cases}$$

Risolvo la prima equazione del sistema ponendo $b^2 = t$:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 * 2 * (-1)}}{2 * 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \rightarrow t_1 = 1; \quad t_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

L'unica soluzione accettabile è $t_1 = 1$ da cui si ricava $b^2 = 1$. Sostituendo nel sistema si trova:

$$\begin{cases} b^2 = 1 \\ a^2 = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

L'equazione dell'ellisse in forma canonica è data da:

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$