Esercizio 8

Stabilisci per quali valori di k l'equazione

$$\frac{x^2}{8-k}+\frac{y^2}{2k+2}=1$$

rappresenta:

1. Un'ellisse;
2. Una circonferenza;
3. Un'ellisse con i fuochi sull'asse y;
4. Un'ellisse con un vertice di coordinate $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$;
5. Un'ellisse di eccentricità $\frac{1}{2}$.

Svolgimento

1. Ricordiamo l'equazione di un'ellisse in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Quindi la relazione proposta rappresenta un'ellisse se:

$$\begin{cases} 8-k>0 \\ 2+2k>0 \\ 8-k\neq 2+2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k<8 \\ k>-1 \\ 3k\neq 6 \end{cases} \rightarrow -1<k<2 \quad 2<k<8$$

2. l'equazione rappresenta una circonferenza se l'eccentricità è nulla, cioè se:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=0 \ \ se\ a>b\ cio\grave{e}\ se\ il\ semiasse\ maggiore\ \grave{e}\ orizzontale$$

$$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=0 \ \ se\ b>a\ cio\grave{e}\ se\ il\ semiasse\ maggiore\ \grave{e}\ verticale$$

In ogni caso deve essere:

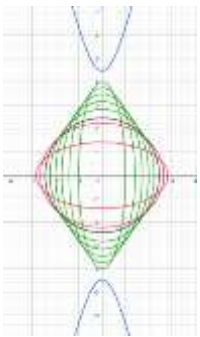
$$8-k=2+2k \quad \rightarrow \quad 3k=6 \quad \rightarrow \quad k=2$$

3. i fuochi si trovano sull'asse delle ordinate se il semiasse maggiore è verticale:

$$8-k<2+2k \quad \rightarrow \quad 6<3k \quad \rightarrow \quad k>2$$

Quindi se

$$2<k<8$$



In figura sono rappresentate le curve per vari valori di k. In rosso le ellissi per $k=0$ e $k=1$; in nero la circonferenza ($k=2$); in verde le ellissi con fuochi sull'asse y ($k=3, 4, 5, 6, 7$). Per $k=9$ si ottiene un'iperbole (in blu).

4. Sostituiamo a x e y le coordinate del vertice e troviamo k:

$$\frac{0^2}{8-k}+\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2k+2}=1$$

$$\frac{12}{2k+2}=1 \quad \rightarrow \quad 12=2k+2 \quad \rightarrow \quad 2k=10 \quad \rightarrow \quad k=5$$

Dato che $2<k<8$ l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ordinate.

4. Supponiamo che il semiasse maggiore sia orizzontale. In questo caso l'eccentricità è data da:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Sostituendo:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{(8-k)^2-(2k+2)^2}}{8-k}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{64-16k+k^2-4k^2-8k-4}}{8-k}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{60-24k-3k^2}}{8-k} \quad (1)$$

Per le condizioni di esistenza deve essere:

$$k\neq 8 \; e \; -3k^2-24k+60>0$$

$$k_{1-2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2-(-3)\cdot 60}}{-3}=\frac{12\pm\sqrt{144+180}}{-3}=\frac{12\pm\sqrt{324}}{-3}=\frac{12\pm 18}{-3}$$

$$k_1=-10 \;\; k_2=2$$

Condizioni di esistenza:

$$-10<k<2$$

Indicate le condizioni di esistenza possiamo risolvere l'equazione (1):

$$8-k=2\sqrt{60-24k-3k^2}$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$64-16k+k^2=4(60-24k-3k^2)$$

$$64-16k+k^2=240-96k-12k^2$$

$$13k^2+80k-176=0$$

$$k_{1-2}=\frac{-40\pm\sqrt{40^2-(-176)\cdot 13}}{13}=\frac{-40\pm\sqrt{1600+2288}}{13}=\frac{-40\pm\sqrt{3888}}{13}=$$

$$\frac{-40 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^5}}{13} = \frac{-40 \pm 4 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{13} = \frac{-40 \pm 36\sqrt{3}}{13}$$

$$k_1 \cong 1.7 \quad k_2 \cong -7.8$$

Per quanto riguarda le condizioni di esistenza tutte e due le soluzioni sono accettabili ma se $k < -1$ l'equazione data non rappresenta un'ellisse. L'unica soluzione accettabile è, quindi:

$$k = \frac{-4\left(10 - 9\sqrt{3}\right)}{13}$$

In questo caso l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ascisse. Dobbiamo controllare se esiste un'altra ellisse con fuochi sull'asse delle ordinate che presenta le stessa eccentricità. In questo caso:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{(2k+2)^2 - (8-k)^2}}{2k+2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{4k^2 + 8k + 4 - 64 + 16k - k^2}}{2k+2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3k^2 + 24k - 60}}{2k+2} \quad (2)$$

Per le condizioni di esistenza deve essere:

$$k \neq -1 \;\; e \;\; 3k^2 + 24k - 60 > 0$$

$$k_{1-2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 3 \cdot (-60)}}{3} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{3} = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{3} = \frac{-12 \pm 18}{3}$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = -10$$

Condizioni di esistenza:

$$k < -10 \;\; e \;\; k > 2$$

Indicate le condizioni di esistenza possiamo risolvere l'equazione (2):

$$2k + 2 = 2\sqrt{3k^2 + 24k - 60}$$

$$2(k+1) = 2\sqrt{3k^2 + 24k - 60}$$

$$k + 1 = \sqrt{3k^2 + 24k - 60}$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$k^2 + 2k + 1 = 3k^2 + 24k - 60$$

$$2k^2 + 22k - 61 = 0$$

$$k_{1-2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 2 \cdot (-61)}}{2} =$$

$$= \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 122}}{2} = \frac{-11 \pm \sqrt{243}}{2} = \frac{-11 \pm \sqrt{3^5}}{2} = \frac{-11 \pm 9\sqrt{3}}{2}$$

$$k_1 \cong 2.3 \quad k_2 \cong -13.3$$

Per quanto riguarda le condizioni di esistenza tutte e due le soluzioni sono accettabili ma se $k < -1$ l'equazione data non rappresenta un'ellisse. L'unica soluzione accettabile è, quindi:

$$k = \frac{-11 + 9\sqrt{3}}{2}$$

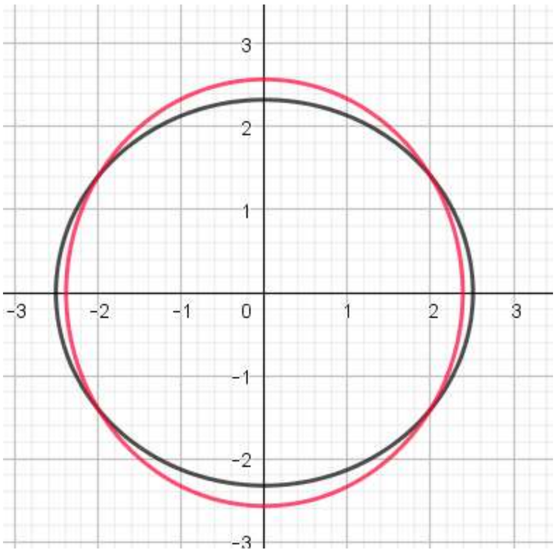
In questo caso l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ordinate.

In conclusione esistono due ellissi con eccentricità $\frac{1}{2}$.: Una con semiasse maggiore sull'asse delle ascisse per:

$$k = \frac{-4\left(10 - 9\sqrt{3}\right)}{13}$$

E una con il semiasse maggiore sull'asse delle ordinate per:

$$k = \frac{-11 + 9\sqrt{3}}{2}$$



Le due ellissi con eccentricità 1/2.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales