## Esercizio 1

Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = e^{-5x} + 5x^2 - 10$$

## Svolgimento

Per prima cosa troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.
L'equazione caratteristica è la seguente:

$$P(z) = z^3 + 5z^2 - z - 5 = 0$$

Questa equazione ha come soluzione z=1. Divido per z-1.

$$\begin{array}{l|l}
z^3 + 5z^2 - z - 5 & \underline{z-1} \\
\underline{-z^3 + z^2} & z^2 + 6z + 5 \\
\quad 6z^2 & \\
\quad \underline{-6z^2 + 6z} & \\
\qquad\quad 5z & \\
\qquad\quad \underline{-5z + 5} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$P(z) = (z-1)(z^2 + 6z + 5) = 0$$

Trovo le altre soluzioni:

$$z_{1-2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2$$

$$z_1 = -1 \qquad z_2 = -5$$

L'equazione caratteristica ha tre soluzioni reali e distinte:

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -1; \quad z_3 = -5$$

A questo punto posso scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x^{-5x}$$

Il termine noto dell'equazione differenziale è la somma di due funzioni:

$$f(x) = e^{-5x} \qquad g(x) = 5x^2 - 10$$

Consideriamo l'integrale particolare associato alla funzione $f(x)$: poiché -5 è una radice dell'equazione caratteristica ed ha molteplicità 1 l'integrale particolare è del tipo:

$$\bar{y} = kxe^{-5x}$$

con k costante da determinare. Derivando si ottiene:

$$\bar{y}' = ke^{-5x} - 5kxe^{-5x} = e^{-5x}(k - 5kx)$$

$$\bar{y}'' = -5ke^{-5x} - 5ke^{-5x} + 25kxe^{-5x} = -10ke^{-5x} + 25kxe^{-5x} = e^{-5x}(25kx - 10k)$$

$$\bar{y}''' = 50ke^{-5x} - 125kxe^{-5x} + 25ke^{-5x} = 75ke^{-5x} - 125kxe^{-5x} = e^{-5x}(75k - 125kx)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$e^{-5x}(75k - 125kx) + 5e^{-5x}(25kx - 10k) - e^{-5x}(k - 5kx) - 5kxe^{-5x} = e^{-5x}$$

Divido ambo i membri per $e^{-5x}$ ed eseguo i calcoli:

$$75k - 125kx + 125kx - 50k - k + 5kx - 5kx = 1$$

$$24k = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{24}$$

L'integrale particolare associato alla funzione $f(x)$ è dato da:

$$\bar{y} = \frac{1}{24}xe^{-5x}$$

Consideriamo adesso l'integrale particolare associato alla funzione $g(x) = 5x^2 - 10$. Il polinomio caratteristico non ha come radice z=0 quindi l'integrale particolare sarà un polinomio generico di secondo grado (lo stesso grado della funzione $g(x)$).

$$\bar{y} = k_2x^2 + k_1x + k_0$$

Derivando si ottiene:

$$\bar{y}' = 2k_2x + k_1$$

$$\bar{y}'' = 2k_2$$

$$\bar{y}''' = 0$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ha:

$$10k_2 - (2k_2x + k_1) - 5(k_2x^2 + k_1x + k_0) = 5x^2 - 10$$

$$10k_2 - 2k_2x - k_1 - 5k_2x^2 - 5k_1x - 5k_0 = 5x^2 - 10$$

$$-5k_2x^2 - (2k_2 + 5k_1)x + 10k_2 - k_1 - 5k_0 = 5x^2 - 10$$

Uguagliando i coefficienti si ricava:

$$\begin{cases} -5k_2 = 5 \\ 2k_2 + 5k_1 = 0 \\ 10k_2 - k_1 - 5k_0 = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_2 = -1 \\ -2 + 5k_1 = 0 \\ -10 - k_1 - 5k_0 = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_2 = -1 \\ k_1 = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} + 5k_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_0 = -\frac{2}{25} \\ k_1 = \frac{2}{5} \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

L'integrale particolare associato alla funzione $g(x)$ è dato da:

$$\bar{y} = -x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{2}{25}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale proposta è dato dalla somma dell'integrale generale associato all'equazione omogenea e dei due integrali particolari calcolati. Quindi:

$$y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3x^{-5x} + \frac{1}{24}xe^{-5x} - x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{2}{25}$$