Esercizio 2

Risolvere l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}$$

Svolgimento

Si tratta di un'equazione differenziale omogenea (infatti numeratore e denominatore sono polinomi omogenei di secondo grado) del primo ordine (appare solo la derivata prima della funzione y). Possiamo scrivere:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Facciamo la seguente sostituzione:

$$t(x) = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = xt(x)$$

Deriviamo la funzione y:

$$y' = t(x) + xt'(x)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si trova:

$$t + xt' = \frac{x^2t^2 + x^2}{x^2t}$$

Semplifichiamo:

$$t + xt' = \frac{t^2 + 1}{t}$$

Ricaviamo l'espressione di t':

$$xt' = \frac{t^2 + 1}{t} - t \quad \rightarrow \quad xt' = \frac{t^2 + 1 - t^2}{t} \quad \rightarrow \quad xt' = \frac{1}{t}$$

$$t' = \frac{1}{xt}$$

Questa equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{xt} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx}t = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad tdt = \frac{dx}{x}$$

Integriamo ambo i membri:

$$\int tdt = \int \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{t^2}{2} = \ln|x| + C$$

Con C costante arbitraria.

$$t^2 = 2\ln|x| + 2C$$

Possiamo porre 2C=K con K costante arbitraria

$$t^2 = 2\ln|x| + K$$

Estraiamo la radice quadrata:

$$t = \pm\sqrt{2\ln|x| + K}$$

Ma avevamo posto $y=tx$, quindi moltiplichiamo ambo i membri per x:

$$tx = \pm x\sqrt{\ln x^2 + K}$$

Quindi:

$$y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + K}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales