Esercizio 2

Risolvere l'equazione differenziale:

$$xy' = 4y - 2x^2y^2$$

Svolgimento

Possiamo scrivere:

$$y' = \frac{4y}{x} - 2xy^2$$

Notiamo che l'equazione è della forma:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x)$$

Dove:

$$a(x) = \frac{4}{x}; \qquad b(x) = -2x \qquad e \qquad \alpha = 2$$

Quindi è un'equazione differenziale di Bernoulli. Per prima cosa notiamo che la funzione *y=0* è soluzione. Vediamo se esistono altre soluzioni. Scriviamo:

$$y' - \frac{4y}{x} = -2xy^2$$

Dividiamo ambo i membri per y^2:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{4}{xy} = -2x \qquad (1)$$

Poniamo:

$$z = \frac{1}{y} \qquad (2)$$

Calcoliamo la derivata prima tenendo presente che y è una funzione[1]:

$$z' = -\frac{y'}{y^2} \qquad \rightarrow \qquad y' = -y^2z'$$

Sostituiamo nell'equazione (1):

$$\frac{-y^2z'}{y^2} - \frac{4z}{x} = -2x \qquad \rightarrow \qquad z' + \frac{4z}{x} = 2x$$

Abbiamo ottenuto un'equazione lineare del primo ordine con:

$$a(x) = \frac{4}{x} \qquad e \qquad b(x) = 2x$$

Applichiamo la relazione risolutiva:

$$z = e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}\, dx + c\right] \qquad (3)$$

Dove:

$$\int a(x)dx = \int \frac{4}{x}dx = 4\ln|x|$$

[1] Dovremmo scrivere $z(x)=y^{-2}(x)$ e quindi derivando si otterrebbe $z'(x)=-y^{-1}(x)y'(x)$. Per semplificare scriviamo $z'=y^{-1}y'$

$$e^{-\int a(x)dx} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{x^4}$$

$$e^{\int a(x)dx} = e^{4\ln x} = e^{\ln x^4} = x^4$$

$$\int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx = \int 2xx^4dx = 2\int x^5dx = \frac{x^6}{3}$$

Sostituendo nella (3) troviamo:

$$z = \frac{1}{x^4}\left(\frac{x^6}{3} + C\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x^4} = \frac{x^6 + 3C}{3x^4}$$

Dalla relazione (2) troviamo la soluzione:

$$y = \frac{3x^4}{x^6 + 3C}$$

Matilde Consales