Esercizio 4

Risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$y'' + 25y = 0$$

Con $y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1; \quad y'\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1$

Svolgimento

È un'equazione differenziale omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Consideriamo l'equazione caratteristica.

$$y^2 + 25 = 0$$

E risolviamola:

$$y^2 = -25 \quad \rightarrow \quad y_{1-2} = \pm i5$$

L'equazione caratteristica presenta due soluzioni complesse coniugate quindi la soluzione generale è data da:

$$y(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cdot cos(\beta x) + c_2 \cdot sin(\beta x)]$$

Dove α=0 (infatti è la parte reale delle radici dell'equazione caratteristica) e β=5 sostituendo:

$$y(x) = c_1 \cdot cos(5x) + c_2 \cdot sin(5x) \qquad (1)$$

Troviamo adesso la soluzione particolare in base alle condizioni indicate. Calcoliamo la derivata prima:

$$y'(x) = -5c_1 \cdot \sin(5x) + 5c_2 \cdot cos(5x)$$

Impostiamo e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{10}\right) = c_1 \cdot cos\left(5\frac{\pi}{10}\right) + c_2 \cdot sin\left(5\frac{\pi}{10}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5c_1 \cdot \sin\left(5\frac{\pi}{10}\right) + 5c_2 \cdot cos\left(5\frac{\pi}{10}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ -5c_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 5c_2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ -5c_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{5} \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1) troviamo:

$$y(x) = -\frac{1}{5}cos(5x) + sin(5x)$$

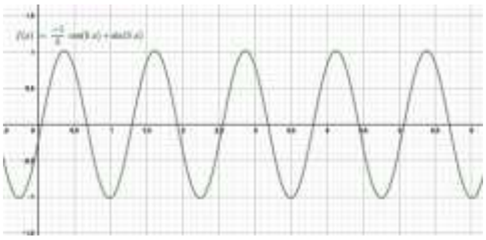

Figura 1 Grafico

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.
Matilde Consales