Equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

Un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti assume la forma:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Dove p e q sono coefficienti reali e *f(x)* è una funzione continua. Se *f(x)=0* l'equazione si dice ***omogenea***.

Prima di vedere come trovare le soluzioni dobbiamo citare e provare un importante teorema.

Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluzioni linearmente indipendenti (cioè una non è multipla dell'altra) dell'equazione differenziale:

$$\boldsymbol{y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0} \qquad (\mathbf{1})$$

Allora la soluzione generale dell'equazione data è una famiglia di soluzioni dipendente da due parametri della forma:

$$\boldsymbol{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$$

Verifichiamo. Consideriamo la soluzione generale:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

E calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)$$

$$y''(x) = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x)$$

Adesso sostituiamo nella (1):

$$c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + p[c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)] + q[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] =$$

Raccogliamo c_1 e c_2:

$$= c_1[y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x)] + c_2[y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x)] =$$

Ma, dato che *$y_1(x)$ e $y_2(x)$* sono soluzioni dell'equazione differenziale le parti evidenziate in verde e in rosa sono nulle quindi:

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

Abbiamo verificato che:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

È soluzione dell'equazione differenziale.

Questo teorema afferma che ci basta conoscere due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione per conoscerle tutte.

Proviamo a vedere se la funzione:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

È soluzione. Procediamo come prima. Calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

La funzione proposta è soluzione dell'equazione differenziale se esiste almeno un valore di λ tale che:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$$

Raccogliamo l'esponenziale:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

L'equazione appena scritta si annulla se:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

La relazione trovata è detta ***equazione caratteristica***.

Si verificano 3 casi.

1.

$$\Delta > 0 \quad \rightarrow \quad p^2 - 4q > 0$$

L'equazione caratteristica presenta due soluzioni reali e distinte λ_1 e λ_2. In questo caso le soluzioni:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad e \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Sono due soluzioni linearmente indipendenti quindi l'equazione differenziale ammette la soluzione generale:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2.

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 - 4q = 0$$

L'equazione caratteristica presenta due soluzioni reali e coincidenti. In questo caso abbiamo una sola soluzione:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

Dobbiamo trovare un'altra soluzione linearmente indipendente. Proviamo con:

$$y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$$

Vediamo se è soluzione. Come al solito calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$y_2'(x) = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2''(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}$$

Adesso sostituiamo:

$$2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} + p\left(e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}\right) + qxe^{\lambda_1 x} =$$

Raccogliamo l'esponenziale:

$$= e^{\lambda_1 x}(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x + p + p\lambda_1 x + qx) =$$

$$= e^{\lambda_1 x}[(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)x + 2\lambda_1 + p] = 0$$

Infatti il trinomio evidenziato in rosso rappresenta l'equazione caratteristica calcolata per λ_1 che è sua soluzione, ma anche il binomio evidenziato in azzurro è nullo perché abbiamo supposto $\Delta=0$ e, quindi $\lambda_1=-p/2$.

Possiamo allora affermare che:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

È soluzione dell'equazione differenziale.

3.

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 - 4q < 0$$

L'equazione caratteristica presenta 2 soluzioni complesse e coniugate $\alpha \pm i\beta$.Le due soluzioni complesse linearmente indipendenti sono:

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Scriviamo la soluzione generale:

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Per una nota proprietà dell'elevamento a potenza:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right) =$$

Ricordiamo la formula di Eulero:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$= e^{\alpha x}\{c_1[\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] + c_2[\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)]\} =$$

$$= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos(\beta x)] + i(c_1 - c_2)\sin(\beta x)$$

Poniamo:

$$C_1 = c_1 + c_2 \qquad C_2 = i(c_1 - c_2)$$

Quindi:

$$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$$