Esercizio 14

Trova i due numeri reali tali che la loro somma sia $7\sqrt{3}+2$ e il loro prodotto sia $18+12\sqrt{3}$.

Svolgimento

Ci sono due modi per risolvere questo esercizio.

Modo 1

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x+y=7\sqrt{3}+2 \\ xy=18+12\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=7\sqrt{3}+2-y \\ (7\sqrt{3}+2-y)y=18+12\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=7\sqrt{3}+2-y \\ (7\sqrt{3}+2)y-y^2=18+12\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=7\sqrt{3}+2-y \\ y^2-(7\sqrt{3}+2)y+18+12\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$y_{1-2}=\frac{7\sqrt{3}+2\pm\sqrt{(7\sqrt{3}+2)^2-4(18+12\sqrt{3})}}{2}=$$

$$=\frac{7\sqrt{3}+2\pm\sqrt{147+28\sqrt{3}+4-72-48\sqrt{3}}}{2}=$$

$$=\frac{7\sqrt{3}+2\pm\sqrt{79-20\sqrt{3}}}{2}$$

A questo punto ci chiediamo: possiamo scrivere la somma sotto radice come il quadrato di un "binomio"? Cioè: esistono due numeri tali che il loro doppio prodotto sia $20\sqrt{3}$ e la somma dei loro quadrati sia 79?

Proviamo. Osserviamo che il prodotto dei due numeri deve essere $10\sqrt{3}$. Scomponiamo in fattori primi:

$$10\sqrt{3}=2\cdot 5\cdot\sqrt{3}$$

I due numeri possono essere 2 e $5\sqrt{3}$ oppure 5 e $2\sqrt{3}$. Calcoliamo:

$$2^2+(5\sqrt{3})^2=4+75=79$$

Allora possiamo scrivere:

$$79-20\sqrt{3}=(2-5\sqrt{3})^2=(5\sqrt{3}-2)^2$$

In ogni caso otterremmo lo stesso risultato.

$$y_{1-2}=\frac{7\sqrt{3}+2\pm\sqrt{(2-5\sqrt{3})^2}}{2}=\frac{7\sqrt{3}+2\pm(2-5\sqrt{3})}{2}$$

$$y_1=\frac{7\sqrt{3}+2+2-5\sqrt{3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{7\sqrt{3} + 2 - 2 + 5\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Torniamo al sistema:

$$\begin{cases} y_1 = 2 + \sqrt{3} \\ x_1 = 7\sqrt{3} + 2 - 2 - \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 6\sqrt{3} \\ x_2 = 7\sqrt{3} + 2 - 6\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

I due numeri sono:

$$x = 6\sqrt{3} \quad e \quad y = 2 + \sqrt{3}$$

Modo 2

Sappiamo che i coefficienti di un'equazione di secondo grado sono legati alle soluzioni dalla seguente relazione:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Dove s rappresenta la somma delle soluzioni e p il prodotto, Nel caso in esame bastava risolvere l'equazione:

$$x^2 - \left(7\sqrt{3} + 2\right)x + 18 + 12\sqrt{3} = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{7\sqrt{3} + 2 \pm \sqrt{\left(7\sqrt{3} + 2\right)^2 - 4\left(18 + 12\sqrt{3}\right)}}{2}$$

Abbiamo risolto precedentemente questa equazione e trovato:

$$x_1 = 6\sqrt{3} \quad e \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales