Esercizio 16

Trovare il parametro *k* tale che l'equazione:

$$x^2 + (2k - 3)x + k^2 + 1 = 0$$

Ammetta due soluzioni reali tali che:

$$x_1^2 + x_2^2 = 7$$

E la somma dei reciproci sia uguale a -4.

Svolgimento

Come prima cosa osserviamo che l'equazione è di secondo grado $\forall k \in \mathbb{R}$.
Adesso calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2k - 3)^2 - 4(k^2 + 1) = 4k^2 - 12k + 9 - 4k^2 - 4 = -12k + 5$$

La soluzioni sono reali se:

$$\Delta \geq 0 \quad \rightarrow \quad -12k + 5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq \frac{5}{12}$$

Per rispondere al primo quesito ricordiamo che i coefficienti di un'equazione di secondo grado sono legati alla somma ed al prodotto delle due radici dalle seguenti relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

Dobbiamo trovare il modo di usare queste relazioni. Scriviamo:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2$$

Quindi:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

Sostituendo la (1) e la (2):

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 7$$

E sostituendo i coefficienti dell'equazione data troviamo:

$$\left(-\frac{2k - 3}{1}\right)^2 - 2\frac{k^2 + 1}{1} = 7$$

$$4k^2 - 12k + 9 - 2k^2 - 2 = 7$$

$$2k^2 - 12k = 0 \quad \rightarrow \quad 2k(k - 6) = 0$$

È un'equazione di secondo grado spuria ed ammette come soluzioni:

$$k_1 = 0 \quad e \quad k_2 = 6$$

L'unica soluzione accettabile è *k=0*. Infatti per *k=6* il discriminante è negativo.

Vediamo adesso se esistono valori di k tali che:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-4$$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=-4$$

Sostituendo la (1) e la (2):

$$\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-4 \quad \rightarrow \quad -\frac{b}{a}\frac{a}{c}=-4 \quad \rightarrow \quad \frac{b}{c}=4$$

E sostituendo i coefficienti dell'equazione data troviamo:

$$\frac{2k-3}{k^2+1}=4$$

$$2k-3-4k^2-4=0 \quad \rightarrow \quad 4k^2-2k+7=0$$

$$\Delta=1-28=-27<0$$

Il discriminante è negativo. Non esistono valori di k che soddisfano la seconda condizione richiesta.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales