Esercizio 18

Trovare il parametro k tale che l'equazione:

$$(k-2)x^2 - 2(k+3)x + k = 0 \quad con\ k \neq 2$$

Ammetta due soluzioni tali che:

1. le radici siano reali;
2. le radici siano opposte;
3. la somma dei quadrati delle radici valga 66;
4. le soluzioni siano discordi.

Svolgimento

1. Le radici sono reali se:

$$\Delta = \frac{b^2}{4} - ac = (k+3)^2 - k(k-2) = k^2 + 6k + 9 - k^2 + 2k \geq 0$$

$$8k + 9 \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \geq -\frac{9}{8}\ e\ k \neq 2$$

2. Le radici sono opposte se l'equazione è pura cioè:

$$b = 0 \quad \rightarrow \quad -2(k+3) = 0 \quad \rightarrow \quad k = -3$$

Ma per questo valore di k si ha $\Delta < 0$ quindi questa condizione non è mai verificata.

3. Per rispondere a questo quesito ricordiamo che i coefficienti di un'equazione di secondo grado sono legati alla somma ed al prodotto delle due radici dalle seguenti relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

Dobbiamo trovare il modo di usare queste relazioni. Scriviamo:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2$$

Quindi:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

Sostituendo la (1) e la (2):

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 66$$

E sostituendo i coefficienti dell'equazione data troviamo:

$$\left(-\frac{-2(k+3)}{k-2}\right)^2 - 2\frac{k}{k-2} = 66$$

$$\frac{4(k^2 + 6k + 9)}{k^2 - 4k + 4} - \frac{2k}{k-2} = 66$$

Dividiamo ambo i membri per 2:

$$\frac{2(k^2+6k+9)}{k^2-4k+4}-\frac{k}{k-2}=33$$

Denominatore comune:

$$\frac{2(k^2+6k+9)-k(k-2)}{k^2-4k+4}=\frac{33(k^2-4k+4)}{k^2-4k+4}$$

Deve essere $k \neq 2$.

$$2k^2+12k+18-k^2+2k-33k^2+132k-132=0$$

$$-32k^2+146k-114=0$$

$$16k^2-73k+57=0$$

$$\Delta=73^2-4\cdot 16\cdot 57=1681$$

È positivo. Calcoliamo le soluzioni:

$$k_{1-2}=\frac{73\pm\sqrt{1681}}{32}=\frac{73\pm 41}{32}$$

$$k_1=\frac{73+41}{32}=\frac{114}{32}=\frac{57}{32}$$

$$k_2=\frac{73-41}{32}=\frac{32}{32}=1$$

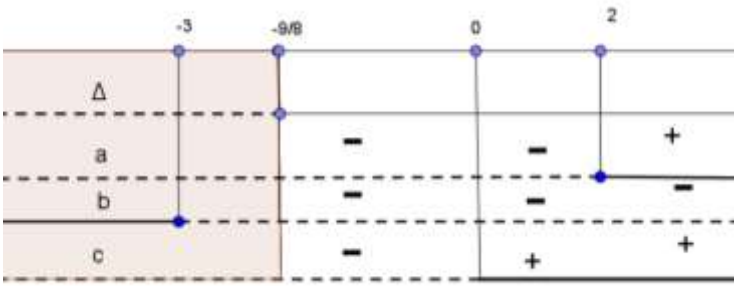
Queste soluzioni sono tutte e due accettabili.

4. Le radici sono discordi se tra i coefficienti dell'equazioni ci sono una permanenza ed una varianza oppure una varianza ed una permanenza (regola di Cartesio). Ci conviene fare il grafico:

$$a>0 \quad \rightarrow \quad k-2>0 \quad \rightarrow \quad k>2$$

$$b>0 \quad \rightarrow \quad -2(k+3)>0 \quad \rightarrow \quad k+3<0 \quad \rightarrow \quad k<-3$$

$$c>0 \quad \rightarrow \quad k>0$$



Dal grafico vediamo che le radici sono discordi se $0<k<2$.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales