Esercizio 19

Trovare il parametro m tale che l'equazione:

$$(2-m)x^2+mx-m+1=0$$

Ammetta due soluzioni tali che:

1. la somma delle radici sia -3;
2. sia $x_1=\frac{2}{2}$;
3. la somma dei cubi delle radici valga -2;
4. le soluzioni siano concordi.

Svolgimento

Innanzi tutto deve essere $m \neq 2$ altrimenti l'equazione è di primo grado. Poi le radici devono essere reali quindi deve essere:

$$\Delta=b^2-4ac=m^2-4(2-m)(1-m)=m^2-8+8m+4m-4m^2 \geq 0$$

$$-3m^2+12m-8 \geq 0$$

$$3m^2-12m+8 \leq 0$$

È una disequazione di secondo grado che dobbiamo risolvere:

$$m_{1-2}=\frac{6\pm\sqrt{36-3\cdot 8}}{3}=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{3}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{3}=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

La disequazione è verificata per:

$$\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} \leq m \leq \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3}$$

1. La somma delle radici deve essere -3 quindi:

$$-\frac{b}{a}=-3 \quad \rightarrow \quad -\frac{m}{2-m}=-3$$

$$\frac{m}{2-m}=3 \quad \rightarrow \quad m=6-3m \quad \rightarrow \quad 4m=6 \quad \rightarrow \quad m=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

La soluzione è accettabile infatti:

$$\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3}$$

2. Una radice deve essere $\frac{1}{2}$. Sostituiamo questo valore alla *x* nell'equazione data:

$$(2-m)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}m-m+1=0$$

Determiniamo *m*:

$$\frac{1}{4}(2-m)-\frac{1}{2}m+1=0$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}m-\frac{1}{2}m+1=0$$

$$-\frac{3}{4}m+\frac{3}{2}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}m=\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad m=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=2$$

La soluzione è accettabile infatti:

$$\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3}\leq\frac{3}{2}\leq\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3}$$

Notiamo che, in questo caso, l'equazione proposta è di primo grado quindi $x=\frac{1}{2}$ è l'unica soluzione.

3. Per rispondere a questo quesito ricordiamo che i coefficienti di un'equazione di secondo grado sono legati alla somma ed al prodotto delle due radici dalle seguenti relazioni:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \quad (2)$$

Dobbiamo trovare il modo di usare queste relazioni. Scriviamo:

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1{x_2}^2+x_2^3$$

Quindi:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1{x_2}^2$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

Sostituendo la (1) e la (2):

$$x_1^3+x_2^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-2$$

E sostituendo i coefficienti dell'equazione data troviamo:

$$\left(-\frac{m}{2-m}\right)^3-3\frac{1-m}{2-m}\left(-\frac{m}{2-m}\right)=-2$$

$$\frac{-m^3}{(2-m)^3}-3\frac{-m+m^2}{(2-m)^2}=-2$$

$$\frac{-m^3+(3m-3m^2)(2-m)}{(2-m)^3}=\frac{-2(2-m)^3}{(2-m)^3}$$

$$-m^3+6m-3m^2-6m^2+3m^3=-2(8-12m+6m^2-m^3)$$

$$2m^3-9m^2+6m+16-24m+12m^2-2m^3=0$$

$$3m^2-18m+16=0$$

Calcoliamo *m*:

$$m_{1-2}=\frac{9\pm\sqrt{81-48}}{3}=\frac{9\pm\sqrt{33}}{3}$$

Dobbiamo verificare se sono accettabili entrambe.

Dato che:

$$\frac{9+\sqrt{33}}{3} > \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3}$$

L'unica soluzione accettabile è:

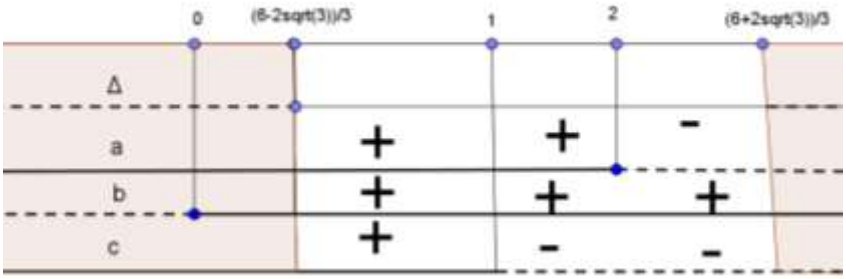
$$m = \frac{9-\sqrt{33}}{3}$$

4. Le radici sono concordi se tra i coefficienti dell'equazioni ci sono due varianze o due permanenze (regola di Cartesio). Ci conviene fare il grafico:

$$a > 0 \quad \rightarrow \quad 2 - m > 0 \quad \rightarrow \quad m < 2$$

$$b > 0 \quad \rightarrow \quad m > 0$$

$$c > 0 \quad \rightarrow \quad 1 - m > 0 \quad \rightarrow \quad m < 1$$



Dal grafico vediamo che le radici sono concordi se:

$$\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} \leq m < 1 \quad o \quad 2 < m \leq \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales