Esercizio 24

Risolvere la seguente equazione:

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x + 5} - \sqrt{\log_2 x - 1} = 2$$

Svolgimento

Facciamo subito un cambiamento di base:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x$$

Sostituendo:

$$\sqrt{5 - \log_2 x} - \sqrt{\log_2 x - 1} = 2$$

Esistenza:

$$5 - \log_2 x \geq 0 \quad \rightarrow \quad \log_2 x \leq 5 \quad \rightarrow \quad x \leq 32$$

$$\log_2 x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \log_2 x \geq 1 \quad \rightarrow \quad x \geq 2$$

Quindi deve essere:

$$2 \leq x \leq 32$$

Poniamo $t = \log_2 x$ e sostituiamo:

$$\sqrt{5 - t} = \sqrt{t - 1} + 2$$

Eleviamo ambo i membri alla seconda:

$$5 - t = t - 1 + 4\sqrt{t - 1} + 4$$

$$2 - 2t = 4\sqrt{t - 1}$$

Dividiamo ambo i membri per 2:

$$1 - t = 2\sqrt{t - 1}$$

Eleviamo ambo i membri alla seconda:

$$1 - 2t + t^2 = 4(t - 1)$$

$$1 - 2t + t^2 = 4t - 4$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

Risolviamo:

$$t_{1-2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

$$t_1 = 5 \qquad t_2 = 1$$

Se *t=5*:

$$\log_2 x = 5 \quad \rightarrow \quad x = 2^5 = 32$$

Se *t=1*:

$$\log_2 x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Tutte e due le soluzioni sono accettabili.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales