Equazioni frazionarie di secondo grado

Esercizio 2

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x-5}{x-1}+\frac{x-1}{x-5}+2=0$$

Prima di tutto troviamo il campo di esistenza. Deve essere

$$x-1\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq 1 \quad e \quad x-5\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq 5.$$

Facciamo i calcoli. Il denominatore comune è (x-1)(x-5). Quindi:

$$\frac{(x-5)(x-5)+(x-1)(x-1)+2(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-5)}=0$$

$$\frac{(x-5)^2+(x-1)^2+2(x^2-5x-x+5)}{(x-1)(x-5)}=0$$

$$\frac{x^2-10x+25+x^2-2x+1+2(x^2-6x+5)}{(x-1)(x-5)}=0$$

$$\frac{x^2-10x+25+x^2-2x+1+2x^2-12x+10}{(x-1)(x-5)}=0$$

$$\frac{4x^2-24x+36}{(x-1)(x-5)}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4(x^2-6x+9)}{(x-1)(x-5)}=0$$

Posso dividere ambo i membri per 4:

$$\frac{x^2-6x+9}{(x-1)(x-5)}=0$$

Una frazione è nulla se il suo numeratore è nullo.

$$x^2-6x+9=0$$

Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado otteniamo:

$$x_{1-2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4*1*9}}{2*1}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Le due soluzioni sono coincidenti.

Senza fare i calcoli si sarebbe potuto osservare che:

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$