Esercizio 8

Risolvere la seguente equazione:

$$\left|\frac{2}{3}x - |1-4x|\right| + |2+x| = 3$$

L'equazione presenta un termine con valore assoluto di un valore assoluto, cominciamo considerando il binomio più interno:

$$1-4x > 0 \quad \rightarrow \quad -4x > -1 \quad x < \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$|1-4x| = 1-4x \quad se \quad x < \frac{1}{4} \quad |1-4x| = -1+4x \quad se\ x > \frac{1}{4}$$

Adesso consideriamo il valore assoluto esterno. Dobbiamo distinguere i due intervalli:

$$se\ x < \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}x - 1 + 4x > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{14}{3}x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > \frac{3}{14}$$

$$\left|\frac{14}{3}x - 1\right| = \frac{14}{3}x - 1 \quad se \quad \frac{3}{14} < x < \frac{1}{4} \qquad \left|\frac{14}{3}x - 1\right| = -\frac{14}{3} + 1 \quad se \quad x < \frac{3}{14}$$

$$se\ x > \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}x + 1 - 4x > 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{10}{3}x + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{10}{3}x > -1 \quad \rightarrow \quad x < \frac{3}{10}$$

$$\left|-\frac{10}{3}x + 1\right| = -\frac{10}{3}x + 1 \quad se \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{10} \qquad \left|-\frac{10}{3}x + 1\right| = \frac{10}{3}x - 1 \quad se \quad x > \frac{3}{10}$$

Scriviamo l'equazione in base alle considerazioni fatte fin qui mantenendo, per il momento, il valore assoluto dell'ultimo binomio a primo membro:

$$\begin{cases} -\frac{14}{3}x + 1 + |2+x| = 3 & se \quad x < \frac{3}{14} \\ \frac{14}{3}x - 1 + |2+x| = 3 & se \quad \frac{3}{14} < x < \frac{1}{4} \\ -\frac{10}{3}x + 1 + |2+x| = 3 & se \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{10} \\ \frac{10}{3}x - 1 + |2+x| = 3 & se \quad x > \frac{3}{10} \end{cases}$$

Consideriamo il secondo valore assoluto:

$$2 + x > 0 \quad \rightarrow \quad x > -2$$

Quindi:

$$|2+x| = 2 + x \quad se\ x > -2 \qquad |2+x| = -2 - x \quad se\ x < -2$$

Possiamo scrivere l'espressione dell'equazione nei vari intervalli:

$$\begin{cases} -\frac{14}{3}x+1-2-x=3 \quad se \quad x<-2 \\ -\frac{14}{3}x+1+2+x=3 \quad se \quad -2<x<\frac{3}{14} \\ \frac{14}{3}x-1+2+x=3 \quad se \quad \frac{3}{14}<x<\frac{1}{4} \\ -\frac{10}{3}x+1+2+x=3 \quad se \quad \frac{1}{4}<x<\frac{3}{10} \\ \frac{10}{3}x-1+2+x=3 \quad se \quad x>\frac{3}{10} \end{cases}$$

Non ci resta che risolvere l'equazione nei 5 intervalli $x<-2$:

$$-\frac{14}{3}x+1-2-x=3 \quad \rightarrow \quad -\frac{17}{3}x-1=3 \quad \rightarrow \quad -\frac{17}{3}x=4 \quad x=-\frac{12}{17}$$

Questa soluzione non è accettabile perché esterna all'intervallo considerato.

Intervallo $-2<x<\frac{3}{14}$

$$-\frac{14}{3}x+1+2+x=3 \quad \rightarrow \quad -\frac{11}{3}x+3=3 \quad \rightarrow \quad -\frac{11}{3}x=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

Soluzione accettabile.

Intervallo $\frac{3}{14}<x<\frac{1}{4}$

$$\frac{14}{3}x-1+2+x=3 \quad \rightarrow \quad \frac{17}{3}x+1=3 \quad \rightarrow \quad \frac{17}{3}x=2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6}{17}$$

Questa soluzione non è accettabile perché esterna all'intervallo considerato.

Intervallo $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{10}$

$$-\frac{10}{3}x+1+2+x=3 \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{3}x+3=3 \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{3}x=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

Questa soluzione non è accettabile perché esterna all'intervallo considerato.

Intervallo $x>\frac{3}{10}$

$$\frac{10}{3}x-1+2+x=3 \quad \rightarrow \quad \frac{13}{3}x+1=3 \quad \rightarrow \quad \frac{13}{3}x=2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6}{13}$$

Soluzione accettabile.

L'equazione data ammette come soluzioni $x=0 \; e \; x=\frac{6}{13}$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales