Esercizio 10

Risolvere il seguente sistema di equazioni di primo grado graficamente, per sostituzione, per confronto, per riduzione e con il metodo di Cramer:

$$\begin{cases} (2x-1)(x+3y)+(3x-y)^2 = x(11x+2)+y(y-4) \\ \dfrac{2x+y}{2}-\dfrac{y(x-7)}{3}=\dfrac{x(3-2y)}{6}+y-2 \end{cases}$$

Svolgimento

Per prima cosa facciamo i calcoli indicati e scriviamo le due equazioni in forma implicita:

$$\begin{cases} 2x^2+6xy-x-3y+9x^2-6xy+y^2 = 11x^2+2x+y^2-4y \\ \dfrac{3(2x+y)-2y(x-7)}{6}=\dfrac{3x-2xy+6y-12}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-3y-2x+4y=0 \\ 6x+3y-2xy+14y=3x-2xy+6y-12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x+y=0 \\ 6x+17y=3x+6y-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y=0 \\ 6x+17y-3x-6y+12=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-y=0 \\ 3x+11y+12=0 \end{cases}$$

Risolviamo graficamente:

Dobbiamo disegnare le due rette. Scriviamo le due equazioni in forma esplicita rispetto a *y*:

$$\begin{cases} r: & y=3x \\ s: & y=-\dfrac{3}{11}x-\dfrac{12}{11} \end{cases}$$

Adesso troviamo due punti per ciascuna retta assegnando un valore alla variabile indipendente *x*:

$$retta\ r: x=0 \quad \rightarrow \quad y=0; \quad x=1 \quad \rightarrow \quad y=3$$

$$retta\ s: \ x=0 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{12}{11}; \quad x=1 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{15}{11}$$

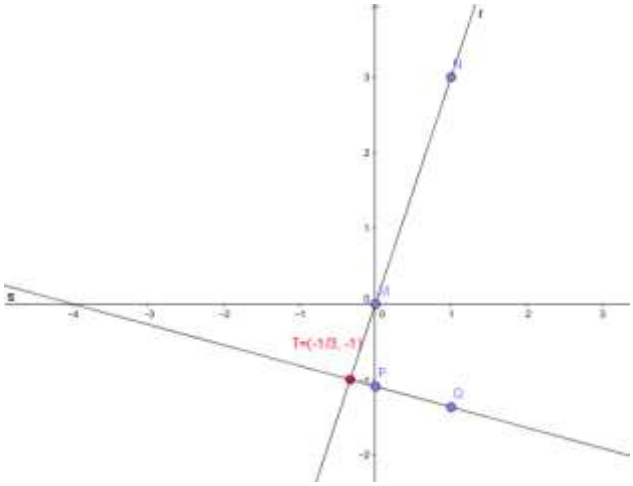
Abbiamo individuato 2 punti per ogni retta la retta *r* passa per i punti:

$$M=(0,0) \quad e \quad N=(1,3)$$

La retta *s* passa per i punti:

$$P=\left(0,-\frac{12}{11}\right) \quad e \quad Q=\left(1,-\frac{15}{11}\right)$$

Possiamo fare il grafico e trovare la soluzione:



Dal grafico si vede che le due rette si incontrano nel punto $T = \left(-\frac{1}{3}, -1\right)$ che costituisce la soluzione del sistema dato.

Risolviamo per sostituzione:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + 11y + 12 = 0 \end{cases}$$

Troviamo prima il valore di una variabile in funzione dell'altra da una delle due equazioni e poi sostituiamo il valore trovato nella seconda equazione per ottenere un'equazione con una sola incognita e risolverla. In questo esercizio conviene procedere come segue:

$$\begin{cases} y = 3x \\ 3x + 11(3x) + 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x + 33x + 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 36x = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{12}{36} = -\frac{1}{3} \\ y = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \end{cases} \rightarrow \ soluzione: \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Risolviamo per confronto:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + 11y + 12 = 0 \end{cases}$$

Per usare questo metodo dobbiamo esplicitare tutte e due le equazioni rispetto alla stessa variabile e scrivere un'equazione in una sola variabile uguagliando i valori ottenuti. Qui conviene esplicitare le due equazioni rispetto alla variabile *y*:

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{3}{11}x - \frac{12}{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x = -\frac{3}{11}x - \frac{12}{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ \frac{33}{11}x = \frac{-3x - 12}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ 33x + 3x = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 36x = -12 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

$$soluzione: \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Risolviamo per riduzione:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + 11y + 12 = 0 \end{cases}$$

Questo metodo consiste nel moltiplicare primo e secondo membro di una delle due equazioni per un opportuno coefficiente in modo tale che, sommando membro a membro, ci si ritrovi con un'equazione in una sola incognita, Moltiplichiamo ambo i membri della prima equazione per *-1*:

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x + 11y + 12 = 0 \end{cases}$$

E sommiamo alla seconda equazione:

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x - 3x + 11y + y + 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 12y = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -3x - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -3x = 1 \end{cases}$$

$$soluzione: \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Risolviamo con il metodo di Cramer:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + 11y + 12 = 0 \end{cases}$$

Per scrivere la matrice dei coefficienti associata al sistema dobbiamo scrivere i termini contenenti le variabili nello stesso ordine nella prima e nella seconda equazione e portare i termini noti a secondo membro:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + 11y = -12 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice associata al sistema (nella prima colonna scriviamo i coefficienti della *x* e nella seconda quelli della *y*):

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

A questo punto calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - (-1) \cdot 3 = 33 + 3 = 36$$

Per determinare il valore di *x* dobbiamo scrivere la matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$$

Che si ottiene da quella associata al sistema sostituendo alla prima colonna (quella relativa alla variabile considerata) i termini noti delle equazioni.
Troviamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} = 0 - (-1) \cdot (-12) = -12$$

Troviamo il valore di *x*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -12 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{36} = -\frac{1}{3}$$

Operando nello stesso modo troviamo il valore di *y* (questa volta sostituiremo i termini noti alla seconda colonna della matrice associata al sistema):

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot (-12) - 0 \cdot 3}{36} = \frac{-36}{36} = -1$$

$$soluzione: \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales