Esercizio 1

Verificare che la funzione di variabile complessa $\sin z$ è monogena.

Svolgimento

Dobbiamo separare la parte reale dalla parte immaginaria. Partiamo dalla definizione della funzione di variabile complessa $\sin z$:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} =$$

Ma z è un numero complesso.

$$z = x + iy$$

Sostituendo:

$$= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} =$$

Usando la formula di Eulero:

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}[\cos(-x) + i \sin(-x)]}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x - e^{y}[\cos x - i \sin x]}{2i} = \frac{e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x - e^{y}\cos x + ie^{y}\sin x}{2i} =$$

$$= \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\cos x + i\frac{e^{-y} + e^{y}}{2i}\sin x =$$

$$= i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x + \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x$$

Definiamo le due funzioni u parte reale e v parte immaginaria come segue:

$$u(x,y) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x \qquad v(x,y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x$$

La funzione in esame sarà monogena se saranno verificate le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Calcoliamo le derivate prime parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\cos x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sin x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sin x$$

Poiché le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono differenziabili e verificano le equazioni di Cauchy-Riemann la funzione $\sin z$ è monogena.