

Esercizio 2

Verificare che la funzione di variabile complessa $\cos z$ è monogena.

Svolgimento

Dobbiamo separare la parte reale dalla parte immaginaria. Partiamo dalla definizione della funzione di variabile complessa $\cos z$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} =$$

Ma z è un numero complesso.

$$z = x + iy$$

Sostituendo:

$$= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2} =$$

Usando la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y[\cos(-x) + i \sin(-x)]}{2} = \\ &= \frac{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x + e^y[\cos x - i \sin x]}{2} = \frac{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x + e^y \cos x - ie^y \sin x}{2} = \\ &= \frac{(e^{-y} + e^y) \cos x + i(e^{-y} - e^y) \sin x}{2} = \\ &= \frac{(e^y + e^{-y})}{2} \cos x + i \frac{(e^{-y} - e^y)}{2} \sin x \end{aligned}$$

Definiamo le due funzioni u parte reale e v parte immaginaria come segue:

$$u(x, y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x \quad v(x, y) = \frac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x$$

La funzione in esame sarà monogena se saranno verificate le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Calcoliamo le derivate prime parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{e^{-y} - e^y}{2} \cos x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x \end{aligned}$$

Poiché le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili e verificano le equazioni di Cauchy-Riemann la funzione $\cos z$ è monogena.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales