Esercizio 3

Si studi l'analiticità della funzione:

$$f(x+iy) = x^2 + 2y + i(x^2 + y^2)$$

Svolgimento

La parte reale e la parte immaginaria sono già separate. Consideriamo le due funzioni *u* parte reale e *v* parte immaginaria:

$$u(x,y) = x^2 + 2y \qquad v(x,y) = x^2 + y^2$$

La funzione in esame sarà analitica se saranno verificate le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Calcoliamo le derivate prime parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

Le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte solo per i valori di x e y che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x = 2y \\ 2 = -2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

E quindi solo per il punto:

$$z_0 = -1 - i$$

La funzione è differenziabile in z_0 ma non è analitica perché le equazioni di Cauchy-Riemann non sono soddisfatte in un intorno di z_0.

Matilde Consales