Esercizio 1.

Sia C l'insieme:

$$C = \{(x, y, z): x^2 + z^2 = 4, x + y + z = 1, z \geq 0\}.$$

Determinare i punti di C che si trovano a minima distanza dal punto $P \equiv (0,1,0)$

Svolgimento:

Il solido $x^2+z^2=4$ è un cilindro avente per base un cerchio posizionato sul piano xz di centro x=0, z=0 e raggio 2, x+y+z=1 è un piano passante per il punto P inclinato di 45° rispetto agli assi cartesiani ortogonali. L'insieme C è l'intersezione tra il semi-cilindro con z≥0 e con asse coincidente con l'asse y e con la base (cerchio di centro x=0, z=0 e raggio 2) giacente sul piano xz con il piano inclinato di 45° rispetto agli assi cartesiani ortogonali xyz e passante per il punto $P \equiv (0,1,0)$. Vedi figura 1.

Figura 1 Insieme C: intersezione tra la porzione di cilindro in rosa e il piano inclinato.

Passo 1:

Considero la funzione che rappresenta il luogo dei punti dello spazio equidistanti dal punto P, cioè la sfera di centro $P \equiv (0,1,0)$:

$$f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2$$

i punti cercati devono appartenere a C e quindi sia al cilindro che al piano.

Passo 2:

Appartenenza al piano. Per comodità considero:

$$y - 1 = -x - z$$

Sostituendo si trova:

$$g(x, z) = x^2 + (-x - z)^2 + z^2 =$$

$$= x^2 + x^2 + 2xz + z^2 + z^2 = 2x^2 + 2xz + 2z^2 = 2(x^2 + xz + z^2)$$

Passo 3:
Appartenenza al cilindro. Trovo z in funzione di x:

$$z = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Si sostituisce la soluzione positiva perché deve essere z≥0. Deve essere -2≤x≤2 affinché la radice quadrata abbia valori reali.

$$\varphi(x) = 2\left(x^2 + x\sqrt{4 - x^2} + 4 - x^2\right) = 2(4 + x\sqrt{4 - x^2})$$

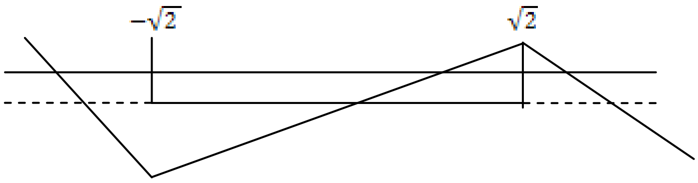
Passo 4:
Studio la derivata prima di φ(x) per trovare i punti di minimo.

$$\varphi'(x) = 2\left(\sqrt{4 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}\right) = 2\left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\right) = 2\frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 4\frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Studio il segno della derivata prima:

$$4\frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \geq 0$$

Il denominatore è sempre positivo mentre il numeratore è positivo per $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.



Dal disegno si vede che φ(x) presenta un minimo per $x = -\sqrt{2}$ ed un massimo per $x = \sqrt{2}$.

Il punto cercato è unico ed ha coordinata $x = -\sqrt{2}$.

Passo 5:
Trovo le altre coordinate risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \quad appartenenza\ al\ piano \\ x^2 + z^2 = 4\ appartenenza\ al\ cilindro \\ x = -\sqrt{2}\ ; z \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ 2 + z^2 = 4 \\ -\sqrt{2} + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ z^2 = 2 \\ -\sqrt{2} + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ z = \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} + y + \sqrt{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Esiste un solo punto che soddisfa la condizione richiesta: $Q \equiv (-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$.