

## Esercizio 2.

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 19xy(14 - 7x - 2y)$$

Determinare i punti critici di  $f$  e classificarli.

### Svolgimento:

Per trovare i punti critici risolvo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 19y(14 - 7x - 2y) - 7 * 19xy = 0 \\ 19x(14 - 7x - 2y) - 2 * 19xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(14 - 7x - 2y) - 7xy = 0 \\ x(14 - 7x - 2y) - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14y - 7xy - 2y^2 - 7xy = 0 \\ 14x - 7x^2 - 2xy - 2xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14y - 14xy - 2y^2 = 0 \\ 14x - 4xy - 7x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 + 7xy - 7y = 0 \\ 7x^2 + 4xy - 14x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(y + 7x - 7) = 0 \\ x(7x + 4y - 14) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y(y - 7) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(7x - 14) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 7x - 7 = 0 \\ 7x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 7 - 7x \\ 7x + 4(7 - 7x) - 14 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 7 - 7x \\ 7x + 28 - 28x - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 7x \\ -21x + 14 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 7 - 7 \cdot \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

I punti critici:

$$A \equiv (0; 0) \quad B \equiv (0; 7) \quad C \equiv (2; 0) \quad D \equiv \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

Scrivo l'Hessiano:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7y - 7y & 14 - 7x - 2y - 2y - 7x \\ 14 - 7x - 2y - 2y - 7x & -2x - 2x \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -14y & 14 - 14x - 4y \\ 14 - 14x - 4y & -4x \end{vmatrix}$$

Considero il punto  $A \equiv (0, 0)$ :

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 14 \\ 14 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(H(0,0)) = 0 - 14 * 14 = -196 < 0$$

A è un punto di sella.

Considero il punto  $B \equiv (0,7)$ :

$$H(0,7) = \begin{vmatrix} -98 & -14 \\ -14 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(H(0,7)) = 0 - 14 * 14 = -196 < 0$$

B è un punto di sella.

Considero il punto  $C \equiv (2,0)$ :

$$H(2,0) = \begin{vmatrix} 0 & -14 \\ -14 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\det(H(2,0)) = 0 - 14 * 14 = -196 < 0$$

C è un punto di sella.

Considero il punto  $D \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ :

$$H\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = \begin{vmatrix} -14 * \frac{7}{3} & 14 - 14 * \frac{2}{3} - 4 * \frac{7}{3} \\ 14 - 14 * \frac{2}{3} - 4 * \frac{7}{3} & -4 * \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{98}{3} & -\frac{14}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{8}{3} \end{vmatrix}$$

$$\det\left(H\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)\right) = -\frac{98}{3} \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{784 - 196}{9} = \frac{588}{9} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)}{\partial x^2} = -\frac{98}{3} < 0$$

D è un punto di minimo.