Esercizio 3.

Sia (a,b,c) un punto della superficie S definita da:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{9}=1$$

Scrivere l'equazione del piano tangente a S in $(a,b,c)=(\frac{3\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},0)$ e determinare le componenti del versore normale a S nel medesimo punto.

Svolgimento:

Posto

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{9}-1$$

L'equazione del piano tangente all'ellissoide nel punto (a,b,c) è data da:

$$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x|(a,b,c)}+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y|(a,b,c)}+(z-c)\frac{\partial F}{\partial z|(a,b,c)}=0$$

$$(x-a)\frac{2a}{3}+(y-b)\frac{2b}{2}+(z-c)\frac{2c}{9}=0$$

Ponendo $a=\frac{3\sqrt{5}}{4}, b=\frac{1}{2}\ e\ c=0$ si trova:

$$\left(x-\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)\frac{2}{3}\frac{3\sqrt{5}}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=0\ \rightarrow\ \left(x-\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}=0$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{15}{8}+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}=0\ \rightarrow\ \frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{15+2}{8}=0\ \rightarrow\ \frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{17}{8}=0$$

Equazione del piano cercato:

$$4\sqrt{5}x+4y-17=0$$

I coefficienti del piano tangente in un punto sono le componenti del vettore normale alla superficie in quel punto. Per trovare il versore calcolo la norma:

$$\|4\sqrt{5},4,0\|=\sqrt{16*5+16}=\sqrt{16*6}=4\sqrt{6}$$

Versore:

$$\left(\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{6}},\frac{4}{4\sqrt{6}},0\right)\ \rightarrow\ \left(\frac{\sqrt{30}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$$