Esercizio 4.

Calcolare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti (e i corrispettivi valori di massimo e minimo) della funzione:

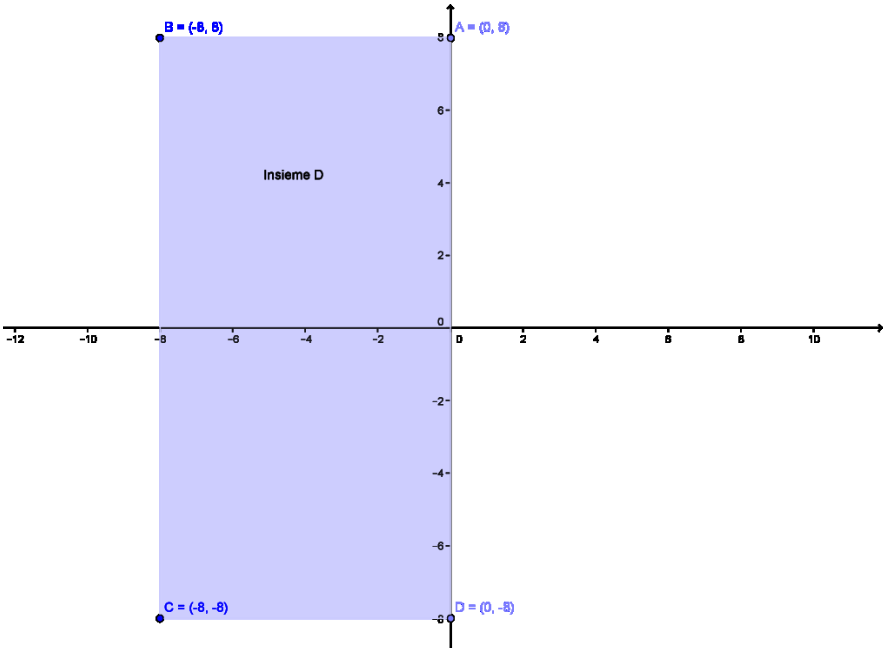
$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + 4xy$$

Nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in R^2 : -8 \leq x \leq 0, |y| \leq 8\}$$

Si faccia il grafico di D.

Svolgimento:



Per trovare i punti critici della funzione data calcolo le derivate prime parziali:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy - y^2 + 4y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2xy + 4x$$

Risolvo il sistema formato dalle due derivate prime parziali uguagliate a 0.

$$\begin{cases} 2xy - y^2 + 4y = 0 \\ x^2 - 2xy + 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(2x - y + 4) = 0 \\ x^2 - 2xy + 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x^2 - 2xy + 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x^2 - 2x(2x+4) + 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x^2 - 4x^2 - 8x + 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ -3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x(3x+4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ 3x + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Il primo punto $P_1 \equiv (0,0)$ è sulla frontiera dell'insieme D. Precisamente si trova sul segmento AD di estremi $A \equiv (0,\ 8)$ e $D \equiv (0,-8)$. La retta sostegno di questo segmento ha equazione x=0.

$$f(0,y) = 0 * y - 0 * y^2 + 4 * 0 * y = 0$$

Su questo segmento la funzione in studio è costante quindi non ci sono punti né di massimo né di minimo.

Il secondo punto $P_2 \equiv (-4,0)$ è interno all'insieme D. Calcolo l'Hessiano:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x - 2y + 4 \\ 2x - 2y + 4 & -2x \end{vmatrix}$$

$$H(-4,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

P_2 è un punto di sella.

Il terzo punto $P_3 \equiv (0,4)$ si trova sulla frontiera dell'insieme D. . Precisamente si trova sul segmento AD di estremi $A \equiv (0,\ 8)$ e $D \equiv (0,-8)$. La retta sostegno di questo segmento ha equazione x=0.

$$f(0,y) = 0^2 * y - 0 * y^2 + 4 * 0 * y = 0$$

Su questo segmento la funzione in studio è costante quindi non ci sono punti né di massimo né di minimo.

Il quarto punto $P_4 \equiv \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ è interno all'insieme D. Calcolo l'Hessiano:

$$H\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{8}{3} & 2\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\frac{4}{3} + 4 \\ 2\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\frac{4}{3} + 4 & -2\left(-\frac{4}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{8}{3} & \frac{-8-8+12}{3} \\ \frac{-8-8+12}{3} & \frac{8}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{vmatrix} = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9} > 0$$

Poiché:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{8}{3} > 0$$

Il punto è un minimo.

$$f\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2\frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{4}{3} = \frac{64}{27} - \frac{64}{27} - \frac{64}{9} = -\frac{64}{9}$$

Adesso devo controllare sulla frontiera.

$$A \equiv (0,8) \quad B \equiv (-8,8) \quad C \equiv (-8,-8) \quad D \equiv (0,-8)$$

1. Il segmento AB ha equazione y=8 con $-8 \le x \le 0$. Sostituendo nella funzione data:

$f(x,8) = 8x^2 - 64x + 32x = 8x^2 - 32x = g(x)$

Trovo i massimi e minimi di g(x):
pongo la derivata prima a zero:

$\frac{dg(x)}{dx} = 16x - 32 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{32}{16} = 2$

Questo punto è esterno al segmento considerato.

2. Il segmento BC ha equazione $x = -8$ con $-8 \le y \le 8$. Sostituendo nella funzione data:

$f(-8,y) = 64y + 8y^2 - 32y = 8y^2 + 32y = g(y)$

Trovo i massimi e minimi di g(y):
pongo la derivata prima a zero:

$\frac{dg(y)}{dy} = 16y + 32 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{32}{16} = -2$

$\frac{dg(y)}{dy} > 0 \quad \rightarrow \quad y > -2$

g(y) è decrescente per $y < -2$ e crescente per $y > -2$ quindi il punto:

$P_5 \equiv (-8,-2)$

È un minimo. Si trova:

$f(-8,-2) = (-8)^2 * (-2) - (-8) * (-2)^2 + 4(-8) * (-2) = -128 + 32 + 64 = -32$

3. Il segmento CD ha equazione $y = -8$ con $-8 \le x \le 0$. Sostituendo nella funzione data:

$f(x,-8) = -8x^2 - (-8)^2x + 4(-8)x = -8x^2 - 64x - 32x = -8x^2 - 96x = g(x)$

Trovo i massimi e minimi di g(x):
pongo la derivata prima a zero:

$\frac{dg(x)}{dx} = -16x - 96 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{96}{16} = -6$

$\frac{dg(x)}{dx} > 0 \quad \rightarrow \quad x < -6$

g(x) è crescente per x< -6 e decrescente per $x > -6$ quindi il punto è un massimo Il punto

$P_6 \equiv (-6,-8)$

È un massimo Si trova:

$f(-6,-8) = (-6)^2 * (-8) - (-6) * (-8)^2 + 4(-6) * (-8) = -288 + 384 + 192 = 288$

4. Il segmento DA ha equazione x= 0 con $-8 \leq y \leq 8$. Sostituendo nella funzione data:

$f(0,y) = 0 * y - 0 * y^2 + 4 * 0 * y = 0$

La funzione è costante pertanto non ci sono né massimi né minimi.

Calcolo ora il valore della funzione in ogni vertice dell'insieme D:

$f(A) = f(0,8) = 0^2 * 8 - 0 * 8^2 + 4 * 0 * 8 = 0$

$f(B) = f(-8,8) = (-8)^2 * 8 - (-8) * 8^2 + 4 * (-8) * 8 = 512 + 512 - 256 = 768$

$f(C) = f(-8,-8) = (-8)^2 * (-8) - (-8) * (-8)^2 + 4 * (-8) * (-8) =$

$= -512 + 512 + 256 = 256$

$f(D) = f(0,-8) = 0^2 * (-8) - 0 * (-8)^2 + 4 * 0 * (-8) = 0$

I punti di massimo e minimo sono i seguenti:

$P_4 \equiv \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad f\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{9}$

$P_5 \equiv (-8,-2) \quad f(-8,-2) = -32$

$P_6 \equiv (-6,-8) \quad f(-6,-8) = 288$

$A \equiv (0,8) \quad f(0,8) = 0$

$B \equiv (-8,8) \quad f(-8,8) = 768$

$C \equiv (-8,-8) \quad f(-8,-8) = 256$

$D \equiv (0,-8) \quad f(0,-8) = 0$

$B \equiv (-8,8)$ è massimo assoluto;

$P_5 \equiv (-8,-2)$ è minimo assoluto;

$P_4 \equiv \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ è minimo relativo.