Esercizio 6.

Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione:

$$f(x,y) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y}$$

Svolgimento:

Trovo i punti critici della funzione. Calcolo le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (-x+y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x+2y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y}$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} (-x+y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y} = 0 \\ (x+2y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y} = 0 \end{cases}$$

Divido tutte e due le equazioni per e^{x+y}. Posso farlo perché $e^{x+y} \neq 0 \ \forall (x,y) \in R^2$

$$\begin{cases} (-x+y) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right) = 0 \\ (x+2y) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right) = 0 \end{cases}$$

Sottraggo la seconda equazione alla prima:

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ x + 2y - \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 2(-2x) - \frac{1}{2}x^2 + x(-2x) + (-2x)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ x - 4x - \frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 3x = 0 \\ y = -2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2) = 0 \\ y = -2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Punti critici:

$P_1 \equiv (0,0) \ \ e \ \ P_2 \equiv (2,-4)$

Studio dell'Hessiano:

Calcolo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -e^{x+y} + (-x+y)e^{x+y} + (-x+y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y} =$$

$$= \left(-1 - 2x + 2y - \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y - 1\right)e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = e^{x+y} + (-x+y)e^{x+y} + (x+2y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right)e^{x+y} =$$

$$= \left(1 + 3y - \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right) e^{x+y} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + 3y + 1\right) e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = e^{x+y} + (x + 2y)e^{x+y} + (-x + y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right) e^{x+y} =$$

$$\left(1 + 3y - \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right) e^{x+y} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + 3y + 1\right) e^{x+y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2e^{x+y} + (x + 2y)e^{x+y} + (x + 2y)e^{x+y} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right) e^{x+y} =$$

$$= \left(2 + 2x + 4y - \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2\right) e^{x+y} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + 2x + 4y + 2\right) e^{x+y}$$

Considero il punto $P_1 = (0,\ 0)$:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 2$$

Hessiano:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$$

Il punto P_1 è di sella.

Considero il punto $P_2 = (2, -4)$:

$$\frac{\partial^2 f(2,-4)}{\partial x^2} = \left[-\frac{1}{2}2^2 + 2(-4) + (-4)^2 - 2 * 2 + 2(-4) - 1\right] e^{2-4} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}4 - 8 + 16 - 4 - 8 - 1\right] e^{-2} = -7e^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f(2,-4)}{\partial x \partial y} = \left[-\frac{1}{2}2^2 + 2(-4) + (-4)^2 + 3(-4) + 1\right] e^{2-4} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}4 - 8 + 16 - 12 + 1\right] e^{-2} = 5e^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f(2,-4)}{\partial y^2} = \left[-\frac{1}{2}2^2 + 2(-4) + (-4)^2 + 2 * 2 + 4(-4) + 2\right] e^{2-4} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}4 - 8 + 16 + 4 - 16 + 2\right] e^{-2} = -4e^{-2}$$

$$H(2,-4) = \begin{pmatrix} -7e^{-2} & 5e^{-2} \\ 5e^{-2} & -4e^{-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -7e^{-2} & 5e^{-2} \\ 5e^{-2} & -4e^{-2} \end{vmatrix} =$$

$$= -7e^{-2}(-4e^{-2}) - 5e^{-2} * 5e^{-2} = 28e^{-4} - 25e^{-4} = 3e^{-4} > 0$$

Poiché

$$\frac{\partial^2 f(2,-4)}{\partial x^2} = -7e^{-2} < 0 \quad e \quad \det[H(2,-4)] = 3e^{-4} > 0$$

P_2 è un massimo relativo.