Esercizio 7.

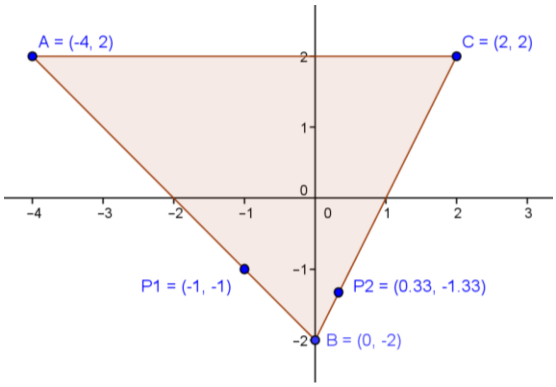
a). Calcolare i punti di massimo e minimo assoluto (e i corrispondenti valori di massimo e minimo) della funzione

$$f(x,y) = 2xye^{-\frac{x+y}{2}}$$

nel triangolo di vertici $A \equiv (-4,2); B \equiv (0,-2)\ e\ C \equiv (2,2)$.

b). Successivamente, posto f(x; y) = 0, si dica se definisce implicitamente una funzione y = g(x) (e/o x = h(y)) il cui grafico passi per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) = (0,1)$ e scrivere il corrispondente valore della tangente in x_0 (e/o y_0).

Svolgimento:



a) Per trovare i punti critici della funzione data calcolo le derivate prime parziali:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\left(2xye^{-\frac{x+y}{2}}\right)}{\partial x} = 2ye^{-\frac{x+y}{2}} + 2xy\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x+y}{2}} = (2y - xy)e^{-\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(2xye^{-\frac{x+y}{2}}\right)}{\partial x} = 2xe^{-\frac{x+y}{2}} + 2xy\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x+y}{2}} = (2x - xy)e^{-\frac{x+y}{2}}$$

Per trovare i punti critici risolvo il sistema:

$$\begin{cases} (2y - xy)e^{-\frac{x+y}{2}} = 0 \\ (2x - xy)e^{-\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases}$$

Divido ambo i membri delle due equazioni per $e^{-\frac{x+y}{2}}$.

$$\begin{cases} 2y - xy = 0 \\ 2x - xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(2-x) = 0 \\ 2x - xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - xy = 0 \\ x(2-y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 4 - 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

La funzione presenta due punti critici:
$P \equiv (0,0)$
È interno all'insieme dato mentre:
$C \equiv (0,0)$
Coincide con un vertice del triangolo.
Calcolo le derivate seconde:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial\left[(2y-xy)e^{-\frac{x+y}{2}}\right]}{\partial x} = -ye^{-\frac{x+y}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(2y-xy)e^{-\frac{x+y}{2}} =$$

$$= \left(-2y + \frac{1}{2}xy\right)e^{-\frac{x+y}{2}} = y\left(\frac{1}{2}x - 2\right)e^{-\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial\left[(2y-xy)e^{-\frac{x+y}{2}}\right]}{\partial y} = (2-x)e^{-\frac{x+y}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(2y-xy)e^{-\frac{x+y}{2}} =$$

$$= \left(2 - x - y + \frac{1}{2}xy\right)e^{-\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial\left[(2x-xy)e^{-\frac{x+y}{2}}\right]}{\partial y} = -xe^{-\frac{x+y}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x-xy)e^{-\frac{x+y}{2}} =$$

$$\left(-2x + \frac{1}{2}xy\right)e^{-\frac{x+y}{2}} = x\left(\frac{1}{2}y - 2\right)e^{-\frac{x+y}{2}}$$

Considero il punto P e calcolo l'Hessiano:

$$H(0,0) = \left.\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \begin{vmatrix} 0 & 2e^0 \\ 2e^0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

L'Hessiano è negativo quindi P è un punto di sella.
Considero la frontiera.
1. Segmento $\overline{AB}$:

trovo la retta sostegno:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \quad \to \quad \frac{y-2}{-2-2} = \frac{x-(-4)}{0-(-4)} \quad \to \quad \frac{y-2}{-4} = \frac{x+4}{4}$$

$$y - 2 = -x - 4 \quad \to \quad y = -x - 2$$

Su $\overline{AB}$ $\quad y = -x - 2 \quad e \quad -4 \le x \le 0$

Sostituendo questi valori trovo:

$$f(x,y) = f(x,-x-2) = 2x(-x-2)e^{-\frac{x-x-2}{2}} = (-2x^2 - 4x)e = -2e(x^2 + 2x) = g(x)$$

Trovo i punti critici di g(x):

$g'(x) = -2e(2x+2) = -4e(x+1)$

$g'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x+1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

$y = -(-1) - 2 = -1$
Punto critico $P_1 \equiv (-1,-1)$.

Per vedere se è massimo o minimo studio il segno di g'(x).

$g'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad -4e(x+1) > 0 \quad x+1 < 0 \quad x < -1$

P_1 è un massimo. Infatti:
$f(P_1) = f(-1,-1) = 2(-1)(-1)e^{-\frac{-1-1}{2}} = 2e$

$f(A) = f(-4,2) = 2(-4) * 2e^{-\frac{-4+2}{2}} = -16e$

$f(B) = f(0,-2) = 2 * 0(-2)e^{-\frac{0-2}{2}} = 0$

2. Segmento $\overline{BC}$:

trovo la retta sostegno:

$$\frac{y-y_B}{y_C-y_B} = \frac{x-x_B}{x_C-x_B} \quad \rightarrow \quad \frac{y-(-2)}{2-(-2)} = \frac{x-0}{2-0} \quad \rightarrow \quad \frac{y+2}{4} = \frac{x}{2}$$

$y+2 = 2x \quad \rightarrow \quad y = 2x-2$

Su $\overline{BC}$ $\;y = 2x-2 \quad e \;\; 0 \leq x \leq 2$

Sostituendo questi valori trovo:

$$f(x,y) = f(x,2x-2) = 2x(2x-2)e^{-\frac{x+2x-2}{2}} = (4x^2-4x)e^{-\frac{x+2x-2}{2}} = 4(x^2-x)e^{-\frac{3x-2}{2}}$$

Trovo i punti critici di g(x):

$$g'(x) = 4(2x-1)e^{-\frac{3x-2}{2}} + 4(x^2-x)\left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{3x-2}{2}} = (8x-4-6x^2+6x)e^{-\frac{3x-2}{2}} =$$

$$= (-6x^2+14x-4)e^{-\frac{3x-2}{2}} = -2(3x^2-7x+2)e^{-\frac{3x-2}{2}}$$

$g'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-7x+2 = 0$

$$x_{1-2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2-4*3*2}}{2*3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$

Ci sono due punti critici considero x_1:

$$y = 2 * 2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

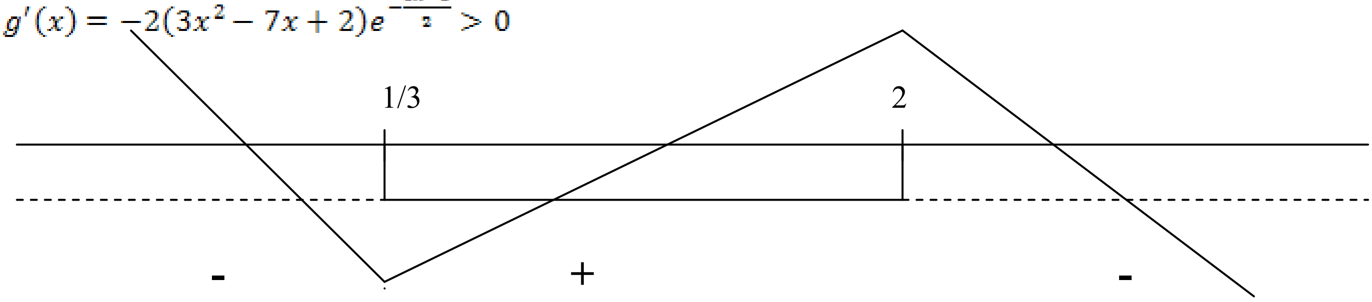
È il punto $C \equiv (2, 2)$. Un vertice del triangolo.
Considero adesso x_2:

$$y = 2 * \frac{1}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

L'altro punto critico è $P_2 \equiv \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Per vedere se sono massimi o minimi studio il segno di g'(x).

$$g'(x) = -2(3x^2 - 7x + 2)e^{-\frac{3x-2}{2}} > 0$$



Dallo schema si vede che g'(x) è decrescente per $0 < x < \frac{1}{3}$ e per x>2. Mentre per $\frac{1}{3} < x < 2$ è crescente. Quindi P_2 è un minimo e C è un massimo. Infatti:

$$f(P_2) = f\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = 2\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)e^{-\frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{2}} = -\frac{8}{9}e^{\frac{1}{2}}$$

$$f(B) = 0$$

$$f(C) = f(2,2) = 2 * 2 * 2e^{-\frac{2+2}{2}} = 8e^{-2}$$

3. Segmento $\overline{CA}$:
Retta sostegno: y=2.
Su $\overline{CA}$ $y = 2 \quad -4 \leq x \leq 2$.
Sostituendo questi valori trovo:

$$f(x, y) = f(x, 2) = 2x * 2e^{-\frac{x+2}{2}} = 4xe^{-\frac{x+2}{2}} = g(x)$$

Trovo i punti critici di g(x):

$$g'(x) = 4e^{-\frac{x+2}{2}} + 4x\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x+2}{2}} = 2(2 - x)e^{-\frac{x+2}{2}}$$

$$g'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Si trova nuovamente il punto $c \equiv (2, 2)$. Per vedere se è massimo o minimo studio il segno di g'(x):

$$g'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 2 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 2$$

C è un massimo.

$f(C) = 8e^{-2}$

$f(A) = -16e$

Riepilogando:

$f(A) = -16e \approx -43.49$ $\quad A$ è *minimo assoluto*

$f(P_1) = 2e \approx 5.44$ $\quad P_1$ è *massimo assoluto*

$f(B) = 0$

$$f(P_2) = -\frac{8}{9}e^{\frac{1}{2}} \approx -1.47$$

$f(C) = 8e^{-2} \approx 1.08$

b) Applichiamo il teorema delle funzioni implicite nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) = (0,1)$.

$$f(P_0) = f(0,1) = 2 * 0 * 1 * e^{-\frac{0+1}{2}} = 0$$

Troviamo il valore delle derivate prime nel punto dato:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0,\,y=1} = \left.(2y - xy)e^{-\frac{x+y}{2}}\right|_{x=0,\,y=1} = (2 * 1 - 0 * 1)e^{-\frac{0+1}{2}} =$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

La funzione data definisce implicitamente una funzione $x = h(y)$ e si ha:

$$h'(y) = -\frac{f_y(h(y),y)}{f_x(h(y),y)}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x=0,\,y=1} = \left.(2x - xy)e^{-\frac{x+y}{2}}\right|_{x=0,\,y=1} = 0$$

La funzione data non definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.