Esercizio 12

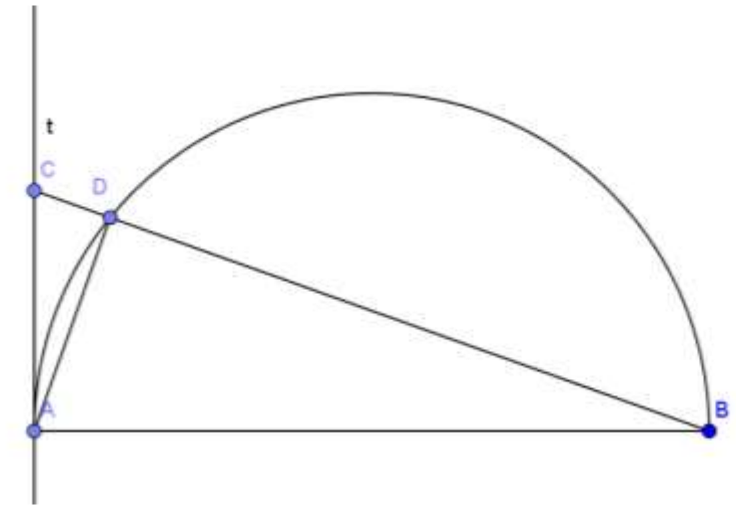
Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$, traccia la tangente t nel punto A. Considera su t un punto C in modo che $\overline{AC} = 18cm$. Congiungi il punto C con il punto B e indica con D il punto di intersezione con la semicirconferenza.

1. Calcola la lunghezza del raggio sapendo che $\overline{CD} = 10.8cm$;
2. Considera un punto E sulla semicirconferenza diverso da A e da B e la sua proiezione su $\overline{AB}$. Determina $\overline{BH}$ in modo che:

$$\overline{BE}^2 + 8\overline{EH}^2 = \overline{AB}^2$$

Svolgimento

Facciamo il disegno per risolvere il primo punto.



1. Poniamo $r = x$. Quindi $\overline{AB} = 2x$. Osserviamo che il triangolo ADB è rettangolo in D perché inscritto in una semicirconferenza. Per il teorema di Pitagora possiamo scrivere:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 \qquad (1)$$

Possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo CDA (rettangolo in D) per determinare $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{18^2 - 10.8^2} = \sqrt{324 - 116.64} = \sqrt{207.36} = 14.4cm$$

Adesso applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ACB (rettangolo in A) e troviamo l'espressione di $\overline{CB}$ in funzione di x.

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{18^2 + 4x^2} \qquad (2)$$

Adesso possiamo $\overline{BD}$ in funzione di x per sostituirlo nella (1) e risolverla. Dal testo del problema sappiamo che:

$$\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} = 10.8 + \overline{DB}$$

Sostituiamo nella (2) e ricaviamo $\overline{DB}$:

$$10.8 + \overline{DB} = \sqrt{18^2 + 4x^2} = \sqrt{324 + 4x^2}$$

$$\overline{DB} = \sqrt{324 + 4x^2} - 10.8$$

Da cui:

$$\overline{DB}^2 = 324 + 4x^2 - 21.6\sqrt{324 + 4x^2} + 116.64 = 440.64 + 4x^2 - 21.6\sqrt{324 + 4x^2}$$

Possiamo sostituire nella (1):

$$4x^2 = 14.4^2 + 440.64 + 4x^2 - 21.6\sqrt{324 + 4x^2}$$

$$207.36 + 440.64 - 21.6\sqrt{324 + 4x^2} = 0$$

$$648 = 21.6\sqrt{324 + 4x^2}$$

$$30 = \sqrt{324 + 4x^2}$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$900 = 324 + 4x^2$$

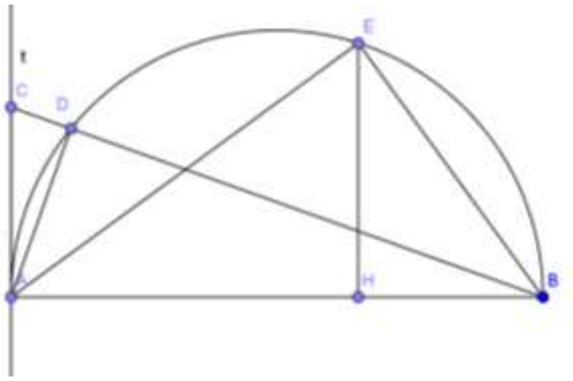
$$4x^2 = 576$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12cm$$

Il raggio della circonferenza è *12cm.*

2. Facciamo il disegno



Poniamo $\overline{HB} = x$ e applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo AEB (rettangolo in E). ricordiamo l'enunciato:

Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

$$\overline{EH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$$

$$\overline{EH}^2 = \overline{AH} \cdot x \qquad (3)$$

Ma:

$$\overline{AH} = \overline{AB} - \overline{HB} \quad \rightarrow \quad \overline{AH} = \overline{AB} - x$$

Sostituiamo nella (3):

$$\overline{EH}^2 = (24 - x)x$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo EHB troviamo:

$$\overline{BE}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HB}^2$$

Sostituendo i valori che conosciamo:

$$\overline{BE}^2 = (24 - x)x + x^2 = 24x - x^2 + x^2 = 24x$$

Sostituiamo nell'equazione del testo del problema (che riscriviamo per comodità):

$$\overline{BE}^2 + 8\overline{EH}^2 = \overline{AB}^2$$

$$24x + 8(24 - x)x = 24^2$$

Possiamo dividere ambo i membri per 8:

$$3x + 24x - x^2 = 72$$

Risolviamo l'equazione:

$$x^2 - 27x + 72 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 72}}{2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 288}}{2} = \frac{27 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{27 \pm 21}{2}$$

$$x_1 = \frac{27 + 21}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$x_2 = \frac{27 - 21}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

La prima soluzione non è accettabile infatti $\overline{HB}$ deve essere minore del diametro della semicirconferenza quindi il segmento $\overline{HB}$ misura *3cm*.

Matilde Consales