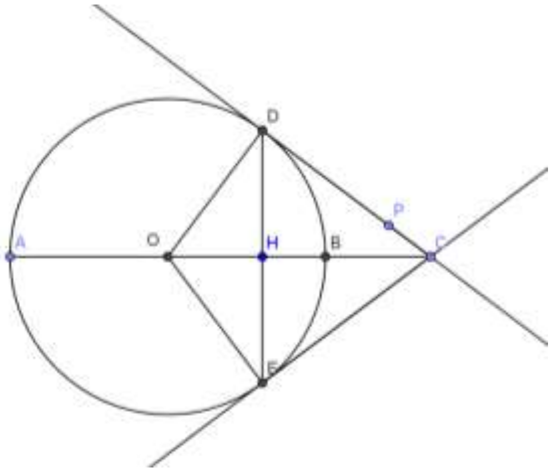
Esercizio 14

È dato una circonferenza di centro O avente diametro di misura $\overline{AB} = 6a \quad con\ a > 0$; si prolunghi il diametro $\overline{AB}$, oltre B, di un segmento $\overline{BC} = 2a$ e da C si conducano le due tangenti alla circonferenza. Detti D ed E i due punti di contatto si determini il segmento $\overline{CP} = x$ su $\overline{CD}$ in modo che sia verificata la relazione:

$$\frac{3}{4}\overline{CE} - 2\overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{PD}$$

Si calcolino il perimetro e l'area del quadrilatero *ODCE*.

Svolgimento



Osserviamo che il triangolo OCD è rettangolo in D per costruzione infatti $\overline{OD}$ è il raggio della circonferenza passante per il punto di tangenza. Allo stesso modo il triangolo OCE è rettangolo in E. Inoltre OCD è congruente a OCE infatti:

- Hanno il lato $\overline{OC}$ in comune;
- Gli angoli $\widehat{DOC}\ e\ \widehat{EOC}$ sono congruenti perché il triangolo DOE è isoscele ($\overline{OD} \cong \overline{OE}$ in quanto raggi della circonferenza) e $\overline{OH}$ è bisettrice dell'angolo $\widehat{DOE}$;
- $\overline{OD} \cong \overline{OE}$ perché raggi della circonferenza.

Ma allora sono congruenti per il primo criterio di congruenza (due lati e l'angolo tra essi compreso congruenti).
Segue che $\overline{DC} \cong \overline{CE}$. Possiamo determinare $\overline{CE}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo *OCE*:

$$\overline{CE} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OE}^2}$$

Dove:

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = 3a + 2a = 5a$$

$$\overline{CE} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = \sqrt{16a^2} = 4a$$

Inoltre:

$$\overline{PD} = \overline{DC} - x = \overline{CE} - x = 4a - x$$

Possiamo sostituire i valori ricavati nella relazione data dal testo del problema:

$$\frac{3}{4}\overline{CE} - 2\overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{PD}$$

$$\frac{3}{4}4a - 2x = \frac{1}{3}(4a - x)$$

$$3a - 2x = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}x$$

$$9a - 6x - 4a + x = 0 \quad \rightarrow \quad 5x = 5a \quad \rightarrow \quad x = a$$

Quindi:

$$\overline{PC} = a$$

Perimetro del quadrilatero *ODCE*

$$P_{ODCE} = \overline{OD} + \overline{DC} + \overline{CE} + \overline{EO} = 3a + 4a + 3a + 4a = 14a$$

Per trovare l'area del quadrilatero osserviamo che:

$$Area_{ODCE} = Area_{ODC} + Area_{OEC} = 2Area_{ODC}$$

Poiché conosciamo la misura di tutti e tre i lati del triangolo usiamo la formula di Erone:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Dove *p* è il semiperimetro del triangolo e *a*, *b e c* sono i lati. Posto:

$$p = \frac{3a + 4a + 5a}{2} = 6a$$

E:

$$a = 3a; \quad b = 4a; \quad c = 5a$$

Si trova:

$$Area_{ODC} = \sqrt{6a(6a - 3a)(6a - 4a)(6a - 5a)} =$$

$$= \sqrt{6a \cdot 3a \cdot 2a \cdot a} = \sqrt{36a^4} = 6a^2$$

Ma allora:

$$Area_{ODCE} = 2Area_{ODC} = 12a^2$$

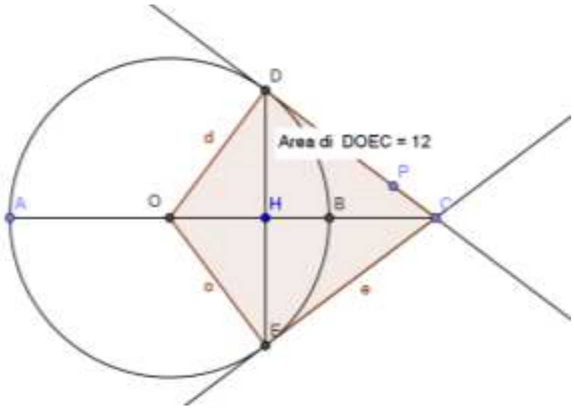
Dato che il triangolo ODC è rettangolo potevamo anche procedere nel seguente modo:

$$Area_{ODC} = \frac{\overline{OD}\overline{DC}}{2} = \frac{3a \cdot 4a}{2} = 6a^2$$

$$Area_{ODCE} = 2Area_{ODC} = 12a^2$$

Ottenendo lo stesso risultato.

Per verificare troviamo l'area con Geogebra ponendo *a=1*.



Matilde Consales